MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROIALE DES SCIENCES
CONTENANT
LES OUVRAGES
ADOPTEZ PAR CETTE
ACADEMIE
Avant Renouvellement en 1699.

TOME TROISIÉME.

Contenu du Tome III.

OUVRAGES DE M. DE ROBERVAL.

OBSERVATIONS ſur la Compoſition des Mouvemens & ſur les moiens de trouver les Touchantes des Lignes courbes. *pag.* 1.

PROJET d'un Livre de Mechanique traitant des Mouvemens compoſez. *pag.* 68.

DE RECOGNITIONE æquationum. *pag.* 71.

DE RESOLUTIONE geometrica planarum & cubicarum Æquationum. *pag.* 113.

TRAITE des Indiviſibles *pag.* 205.

DE TROCHOIDE ejuſque Spatio. *pag.* 291.

EPISTOLA ad R. P. Merſennum. *pag.* 347.

EPISTOLA Evangeliſtæ Torricellii ad Robervallium. *pag.* 357.

EPISTOLA ad Evang. Torricellium. *pag.* 363.

OUVRAGES

DE

MATHEMATIQUE

DE M. DE ROBERVAL.





A LA HAYE,

Chez P. GOSSE & J. NEAULME,

M. DCC. XXXI.

OBSERVATIONS

SUR LA COMPOSITION

DES MOUVEMENS,

ET SUR LE MOYEN DE TROUVER

LES TOUCHANTES

DES LIGNES COURBES.

PAR

M. DE ROBERVAL.

AVERTISSEMENT.

On a trouvé écrit de la main de M. de Roberval au commencement du Manuscrit d'où cét Ouvrage a esté pris, que l'invention en est de luy, mais qu'il ne l'a pas mis en l'état qu'il est; que ç'a esté un Gentilhomme Bourdelois, à qui il avoit donné des leçons en particulier, qui les ayant rédigées par écrit, en a composé ce Traité à sa maniére. Il est vray qu'en 1668. M. Roberval revit cét Ouvrage avant que de le lire dans l'Académie Royale des Sciences; mais il n'y mit pas la derniére main, s'estant contenté d'écrire seulement en divers endroits quelques remarques, que l'on trouvera à la marge de ce Livre.

OB



OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION
DES MOUVEMENS,
ET SUR LE MOYEN DE TROUVER
LES TOUCHANTES
DES LIGNES COURBES.

POUR ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra mesme le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliquez, ou bien les inserer avec nos propositions.

 Défi-

Définitions.

NOUS appellons ligne ſimple celle qui eſtant ſur un plan, eſt telle que chacune de ſes parties peut convenir avec toutes les autres parties de la meſme ligne. Telle eſt la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne compoſée eſt celle dont les parties n'ont point cette propriété de s'ajuſter & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme eſt celuy par lequel un mobile eſt porté d'une vîteſſe toûjours égale à elle-meſme.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puiſſance eſt une force mouvante.

Impreſſion eſt l'action de cette puiſſance.

La ligne de direction de l'impreſſion eſt celle par laquelle la puiſſance meut le mobile.

Nous appellons les impreſſions ſemblables, où diverſes, ſuivant que leurs lignes de direction ſont entre elles paralleles, ou ne le ſont pas, &c.

Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne ſimple, dautant qu'elle eſt décrite par un mouvement ſimple: car, comme nous verrons dans la ſuite, non-ſeulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut eſtre entenduë avoir eſté décrite par un mouvement compoſé de tant de mouvens qu'on voudra.

Nous avons encore défini la puiſſance en tant qu'elle nous peut ſervir conſidérant les diverſitez des mouvemens, ce qui n'empeſche pas que dans d'autres ſpeculations, nous n'entendions par le mot de puiſſance une force capable de ſouſtenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous conſidérerons deux choſes dans les mouvemens, leur direction, & leur vîteſſe.

Axio-

Axiomes.

La direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamétre, au bout duquel le mobile se trouve.

Pl. I. Fig. 1.

Soit le mobile B, (qui par son mouvement décrit la circonférence GBF) au point B, à l'extrémité du demi-diamétre AB, auquel soit perpendiculaire la ligne BC. Je pose pour fondement que BC est la ligne de direction par laquelle se meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raison naturelle, qui est que l'on ne sçauroit prendre quelque autre ligne que ce puisse estre, comme BD, sans tomber dans une absurdité : car puisque la nature ne souffre rien d'indéterminé, & qu'on ne sçauroit prendre la ligne BD, qui fait l'angle oblique DBA, avec le demi-diametre, que par la mesme raison l'on ne fust aussi obligé de prendre de l'autre part la ligne BE qui fait l'angle EBA égal à DBA, (ce qui est absurde) il s'ensuit que la seule ligne qui puisse estre prise pour la direction d'un tel mouvement sera la perpendiculaire BC, qui est la seule qui fasse angles droits avec le mesme demi-diamétre AB.

Ce raisonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.

D'où il s'ensuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'ensuit encore que si un mobile porté de G vers B venoit à se détacher de la circonférence du cercle, comme si le demi-diametre l'ayant porté de G en B, le laschoit au point B, le mobile seroit porté avec cette impression par la ligne BC.

Et d'autant qu'il se rencontre que cette mesme ligne BC est la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent estre, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce mesme point le

mobile qui les décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, & venant à connoistre la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoistrons par mesme moyen sa touchante.

Or noûs entendons qu'un mouvement est composé de plusieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il est le mouvement, est meû par diverses impressions.

THEOREME I.

Proposition premiére.

Si un mobile est porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en mesme plan, en sorte que la ligne droite que décrira le mobile sera le diamétre d'un parallelogramme, les costez duquel seront entre eux comme les vitesses de ces deux mouvemens; & la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamétre à chacun des costez.

Pl. I. Fig. 2. Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens desquels les lignes de direction soient AB, AC, faisant l'angle BAC, & que les mouvemens droits & uniformes soient tels qu'en mesme temps que l'impression AB auroit porté le mobile en B, en mesme temps l'impression AC l'eust portée en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, sera porté le long du diamétre AD du parallelogramme AD, duquel les deux lignes AB, AC, sont les deux costez, & que le mouvement qu'il aura sur le diamétre AD sera uniforme.

Ce que nous comprendrons, si nous nous imaginons que la ligne AB descendant toûjours uniformement & parallelement à la ligne CD, jusqu'à ce qu'elle ne soit qu'une mesme ligne avec la ligne CD; & la ligne AC se mouvant vers la ligne BD en la

mesme

mesme façon, nostre mobile A ne fait autre chose que se rencontrer à tout moment en la commune section de ces deux lignes.

Or il est assez clair que les points de cette commune section sont tous dans le diamétre AD; ce que nous démontrerons encore mieux par cette considération. Imaginons-nous que le mobile A se mouvant uniformement sur l'une des lignes AB ou AC, la mesme ligne se meut toûjours parallelement à soy-mesme. En cette sorte si le mobile est meû sur AB de A en B en mesme temps que AB descend jusques en CD; & posons le cas qu'en un certain temps le mobile soit arrivé en E, & qu'en ce mesme temps le costé AB soit descendu en sorte qu'il fasse une mesme ligne avec FI, dans laquelle prenons FG égale à AE (par nostre supposition elle luy est aussi parallele) donc le mobile A sera en G: je dis que le point G est dans le diamétre AD du parallelogramme ABDC. Car par le point G soit tiré la ligne EGH qui achevera le petit parallelogramme AG. Puis donc que les deux mouvemens que nous considérons sont uniformes, comme AB est à AE, ainsi AC est à AF; & en changeant, AE est à AF comme AB à AC, & l'angle BAC est commun; partant les deux parallelogrammes AD & AG sont semblables & à l'entour d'un mesme diamétre; & par consequent le point G est dans le diamétre AD, ce qu'il falloit démontrer. Le reste de nostre proposition n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit: c'est pour-quoy nous ne nous y arresterons pas plus long-temps.

Mais nous remarquerons qu'en cette premiére composition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons considérer six choses. Sçavoir trois directions qui sont les deux simples, & la composée, & trois impressions qui sont les deux simples & la composée.

Or si les trois directions nous sont données, les trois impressions sont aussi données, c'est à dire les proportions des vîtesses des trois mouvemens; car AB, AC, & AD, estant données, nous n'aurons qu'à prendre un point D dans AD, ligne de direction du

du mouvement composé, & par le point D tirer DB & DC paralleles à AB & AC; & le parallelogramme estant ainsi achevé, les proportions des mouvemens seront les mesmes que celles des deux costez & du diamétre du parallelogramme.

Mais les trois impressions estant connuës, ou la proportion des trois lignes AB, AC, AD, nous ne connoistrons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous sera donnée de position, quoy-que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous soient donnez en espece. Or en ce cas il faut que deux des puissances quelles qu'elles soient, soient ensemble plus grandes que la troisiéme, puis que les lignes AB, AC, AD, qui sont en mesme raison que les puissances, peuvent estre les costez d'un triangle.

Que si l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens composans, & l'autre du composé, nous ne connoistrons rien de la troisiéme, ni de la force des impressions, mais seulement nous aurons une raison donnée telle que la raison de l'impression ou de la puissance composante qui nous est donnée à l'autre puissance composante, ne pourra pas estre plus grande: car AC & AD nous estant données, ayant pris dans AC un point comme C, & de C ayant abbaissé CK perpendiculaire sur AD, la raison de AC à AB ne pourra pas estre plus grande que la raison de la ligne AC à cette perpendiculaire CK, puis que cette perpendiculaire est la moindre de toutes les lignes qui peuvent estre le troisiéme costé d'un triangle, l'un des deux autres estant AC, & le second une portion de la ligne AD.

Pl. I. Fig. 3.

Que si l'on nous eust donné deux mouvemens entiers, c'est-à-dire leurs directions & leurs vîtesses, l'on nous eust aussi donné la direction & la vîtesse du troisiéme; car ayant deux costez d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reste nous est donné.

Pareillement nous estant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raison de la vîtesse du troisiéme à la vîtesse de l'un des deux desquels nous avons la direction, nous connoissons les trois mouvemens, comme si l'on nous donne les di-

directions AB, AC, des deux composans, & la raison de la vîtesse du composé à AB comme de R à S, prenant dans la direction AB un point comme B, & faisant que comme S est à R, ainsi AB soit à un autre, nous trouverons la ligne AD. Donc si du centre A & de l'intervalle AD nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne BID parallele à AFC en D, nous aurons les vîtesses des trois mouvemens AB, AD, BD ou AC, &c. Les choses estant ainsi expliquées, nous énoncerons nostre proposition plus généralement en cette sorte.

Proposition seconde.

Un mouvement composé de tant de mouvemens droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvemens j'en composeray un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé considéré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composeray un second, qui par ce moyen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendray à en composer un seul de tant qu'il me plaira.

D'où il résulte,

Que tout mouvement uniforme & droit peut estre entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvemens qu'on voudra.

Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement AB peut estre composé des deux PL. I. Fig. 4.

deux AC & AD, dont l'un AC eſt compoſé de deux autres AE, AF, l'un deſquels, comme AE, ſera compoſé de deux autres AG & AH, & ainſi de tant qu'on voudra; & le ſecond des deux AD, que nous avons dit qui compoſoient le mouvement AB, peut eſtre entendu comme compoſé de deux autres AI, AK, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en ſorte que le mouvement AB ſera compoſé de tant que l'on voudra, & meſme deſquels les impreſſions ſeront données : car qui m'empeſchera de décrire des parallelogrammes ſi différens qu'il me plaira, deſquels les diagonales ſoient AB, AD, AC, AE, AH, AG, &c.

Et c'eſt icy un champ d'une infinité de belles ſpéculations, comme ſi ayant ſuppoſé que le mouvement AB eſt compoſé de cinq autres mouvemens, la vîteſſe de chacun deſquels nous eſt donnée, l'on nous demande combien il eſt néceſſaire de connoiſtre de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de poſition, & ainſi d'une infinité d'autres qui pourroient eſtre telles que la recherche excédant la capacité de noſtre eſprit, nous n'en pourrions pas donner les ſolutions.

Mais pour tirer de cette propoſition des connoiſſances encore plus belles, nous allons expliquer par ſon moyen la nature des réfléxions & de la réfraction, ayant premiérement poſé pour principe, qu'un mouvement pour compoſé qu'il ſoit de diverſes impreſſions, aura le meſme effet qu'un autre cauſé par une ſeule impreſſion, de laquelle la direction ſoit la meſme que de la compoſée, ſi l'un eſt auſſi fort que l'autre.

Cecy eſtant poſé, nous conſidérons dans les corps deux ſortes d'impreſſions qui les peuvent faire mouvoir; l'une qui les chaſſe d'un lieu vers un autre par violence : telle eſt celle que la raquette donne à la bale, la corde d'un arc à la fléche, &c. L'autre qui ſe fait par attraction des corps, ſoit que cette attraction ſoit réciproque, ou
Pl. I. non; & cette derniére eſt de telle nature qu'elle ne peut jamais
Fig. 5. cauſer de réfléxion, comme ſi l'aimant B attirant le fer A, le fer ſ'ap-

s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empesche de continuer son mouvement de A vers B, il s'arrestera contre le corps C, le pressant continuellement, dautant que l'attraction se faisant au travers de C, la vertu de l'aimant empesche le fer de rejaillir vers A; mais la nature de la premiére sorte d'impression est telle qu'un corps estant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obstacle auquel il ne puisse pas communiquer son impression, l'obstacle la luy rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part; & nous prendrons pour principe, que si un mobile rencontre un obstacle estant meû par une ligne perpendiculaire au mesme obstacle, il retournera vers le lieu duquel il estoit meû. Ainsi A se mouvant vers D par une ligne perpendiculaire à l'obstacle BC, & venant à rencontrer cét obstacle, auquel nous supposons qu'il ne puisse pas communiquer toute ou presque toute l'impression qui l'a fait mouvoir, il sera réfléchi par la mesme ligne DA, par laquelle il s'estoit meû, mais en telle sorte que s'il n'a communiqué rien du tout de son impression à BC, & que BC ne luy en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de vîtesse qu'il en avoit en D. Que s'il a communiqué une partie de son impression à BC, il ne retournera pas avec autant de vîtesse qu'il en avoit en D; & enfin si l'obstacle BC ne luy a pas seulement rendu l'impression qu'il luy vouloit donner, mais encore l'a augmentée, comme si en D il a trouvé un ressort, ou autre chose, alors le mobile retournera de D avec plus de vîtesse qu'il n'en avoit, quand il est premiérement parvenu au mesme point D.

Pl. I. Fig. 6.

Ce principe estant ainsi expliqué, nous n'aurons point de peine à entendre la nature de la réfléxion. Car si nous pensons qu'une bale estant poussée d'A vers B, rencontre au point B la superficie de la terre que nous supposons parfaitement plate & dure, pour ne nous point embarasser dans de nouvelles difficultez, laquelle l'empeschant de passer outre est cause qu'elle se détourne, & pour entendre de quel costé, puisque son mouvement peut estre

Pl. I. Fig. 7.

 di-

divisé en toutes les parties, desquelles l'on peut concevoir qu'il est composé, imaginons-nous qu'il le soit des deux AC & AH, ou CB, desquels le premier fait descendre la bale de A en C, & le second la porte de la gauche AC vers la droite; & parce que la rencontre de la terre est tout-à-fait contraire à l'un de ces mouvemens AC, & qu'elle n'est point opposée à celuy qui l'a fait aller de la gauche vers la droite, il est certain que si le mobile eust esté meû seulement par son propre poids sur un plan incliné, comme AB, estant arrivé en B, ou il se fust arresté tout court, ou suivant sa figure & les degrez d'impression qu'il auroit, il eust roulé le long de BE; mais parce que le mouvement de la bale est un mouvement violent, & que par nostre principe si elle eust esté portée le long de HB, elle seroit remontée de B en H: au lieu que nous avons composé le mouvement AB des deux CB & HB, puis que le mouvement HB est changé en BH, composons un mouvement de deux, dont l'un soit CB ou BE que nous prenons égal à CB, & l'autre EF; & ayant décrit le parallelogramme HE, tirons la diagonale du point B, où se fait la réfléxion en montant vers F, nous trouverons que la bale remontera en autant de temps par la ligne BF, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne AB; en sorte que l'angle de réfléxion sera égal à celuy d'incidence, car supposant que la bale n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point aquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eust rencontré un corps qui luy eust cedé, en sorte que luy communiquant de son impression elle en eust tout autant perdu, il eust fallu composer un mouvement de BE, & d'un autre moindre que EF, comme EG; auquel cas l'angle de réfléxion auroit esté moindre que celuy d'incidence. Et posé que la bale eust rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit esté composé de BE, & d'un autre comme EI, plus grand qu'EF, en montant, auquel cas l'angle de réfléxion auroit esté plus grand que celuy d'incidence.

Et

Et ce meſme raiſonnement ſe peut auſſi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la bale ou tout autre miſſile ayant communiqué toute ſon impreſſion à l'obſtacle, elle rejailliſt ou par la force du reſſort qu'elle rencontre dans l'obſtacle, ou par celle du reſſort qui eſt en elle-meſme, ou par toutes les deux.

Venons à la réfraction, & ſuppoſons que la bale rencontre en B, non plus la ſuperficie de la terre, mais une toile ſi déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant ſeulement une partie de ſon impreſſion; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, dautant que la toile ne luy eſt point oppoſée en ce ſens-là, ſuppoſons qu'elle perd la moitié de l'impreſſion qui la fait deſcendre, en ce cas il faudra continuer BE égale à CB, & prendre EI égale à la moitié de AC, de ſorte que la diagonale BI ſera le chemin que ſuivra le mobile aprés ſa réfraction; & pareillement ſi la viteſſe AC euſt eſté augmentée, par exemple, de la moitié, comme ſi le mobile paſſant de l'air euſt entré dans un autre milieu de telle nature qu'il euſt pû s'y mouvoir une fois auſſi viſte, en ce cas nous aurions fait EI double de AC, BE demeurant égale à BC, &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs. Pl. I. Fig. 8.

Or il faut remarquer avec ſoin cette façon de compoſer, & meſler les mouvemens, puis que nous voyons que des perſonnes les plus éxercées dans la recherche des véritez Mathématiques ſe ſont trompées en cét endroit: ainſi *M. Des Cartes* pour expliquer la réfléxion, décrit un cercle du centre B, qui paſſe par A, & trouve que le point de la circonférence auquel le mobile retournera en autant de temps qu'il a mis à aller de A vers B doit eſtre F; au lieu que d'un raiſonnement ſemblable au noſtre il devoit en tirer comme une conſéquence, que le point F dans cette hypotheſe ſe rencontrera dans la circonference du cercle décrit du centre B par A.

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impreſſion ou viſteſſe, & de détermination, leſquels pourtant il avoit diſtinguez peu auparavant; car

Discours 2. de la Dioptr. en la page 17. ligne derniére, il dit, *& puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination*, &c.

PL. I. Fig. 9. Troisiémement, il semble qu'il explique mal dans la page 19. la réfléxion de la bale sur la superficie de l'eau: car il est vraysemblable que lors que la bale A B entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I, c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un costé l'angle C B D obtus, & de l'autre costé l'angle E B D aigu, & trouve plus de corps, & partant plus de résistance du costé de l'angle obtus que du costé de l'aigu: ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quitte plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau: car bien qu'il y ait toûjours plus d'eau au dessous de B I, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.

Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A *b* trop inclinée, d'autant qu'avant d'estre parvenuë dans l'eau en un endroit auquel la différence de la résistance des deux parties de l'eau luy fut insensible, il faudroit qu'elle eust (pour ainsi dire) labouré un long sillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du costé inférieur; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & sa figure que nous supposons estre ronde, quoy-qu'elle tienne de la nature & des propriétez d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire, vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la mesme superficie; ce qui est assez intelligible.

Voyez ce que dit *M. Des Cartes* sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette proposition du mouvement composé de deux droits: mais puisque dans ce petit Traité nostre but principal est de tirer du me-

mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arresterons pas davantage à cette proposition.

Pl. I. Fig. 10. Mais avant que de passer outre, nous remarquerons deux choses: la premiére, que le diamétre AD eust pû estre décrit par un point porté de deux mouvemens droits AB, AC, desquels ni l'un ni l'autre n'eust esté uniforme. Il eust pourtant fallu qu'à mesure que l'un, comme AB, eust esté augmenté ou diminué, la vitesse de l'autre eust esté changée à proportion, comme si le mobile eust esté porté en AB, d'un mouvement fort lent depuis A jusques à E, & d'un fort viste depuis E jusques en H, &c. pour luy faire décrire la ligne AD, il auroit fallu qu'ayant divisé AC en mesme raison qu'AB dans les points F & I, la ligne AB eust descendu fort lentement d'A vers F, & fort viste de F vers I; ce que l'on pourra mieux concevoir, si l'on considere le mobile en G, comme devant en mesme temps estre porté de deux mouvemens uniformes, & desquels les vistesses sont entre elles, comme les lignes GL & GM le long des mesmes lignes GL & GM, &c.

Pl. I. Fig. 11. Secondement, il nous sera facile de voir que si le mobile eust esté porté sur les lignes AB, AC par deux mouvemens droits, mais différens l'un de l'autre en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toûjours mesme raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eust décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent esté difformes ou disproportionnez, lors que le mobile estant en E dans la ligne AB, il eust esté en F dans la ligne AC, & qu'estant en H, il eust aussi esté en I, la ligne décrite par le mouvement meslé de ces deux auroit esté la courbe AGKD, &c.

Mal expliqué, mais facile à entendre.

Et cette considération ne sera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

Pro-

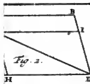
Proposition troisiéme.

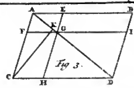
BIEN que ce que nous avons dit jusques icy des mouvemens meslez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles véritez, il sera peut-estre à propos d'en considérer icy divers autres mélanges, quoy-que tout ce que nous en dirons ait une grande étenduë, à cause que ce ne sont icy que les élemens de cette science.

Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut estre entenduë décrite par un mouvement uniforme meslé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal meslé de deux droits & difformes, &c.

Pl. I. Fig. 12. Or la mesme ligne droite peut aussi estre entenduë décrite par une infinité d'autres mouvemens, par éxemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite ACB se mouvant circulairement au tour du centre A, un point, comme C, est porté dans la mesme ligne, en sorte qu'il se trouve toûjours dans la commune section de la mesme ligne AB, & d'une autre DE: nous dirons que la ligne DE est décrite par un mouvement meslé d'un droit qui se fait le long de la ligne AB, & d'un circulaire que la mesme ligne AD communique au mobile qui la décrit par se mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoy-que bien difformes, que si l'on nous donne de position le point A & la ligne DE, quelque point que l'on prenne dans la ligne DE, la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donnée.

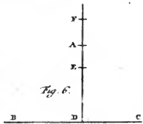
Pl. I. Fig. 13. Car ayant prolongé la ligne AB pardelà la ligne DE, comme en B si du point C auquel nous voulons connoistre la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons CF perpendiculaire à AB, nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en C; mais les deux autres directions sont données, AB du mouvement droit simple, & DE du mouvement composé. Donc les trois impres-

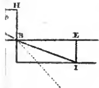

B
I
Fig. 2.
H
D

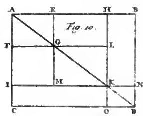

A
E
B
K
G
F
I
Fig. 3.
C
H
D

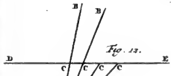

C
Fig. 5.

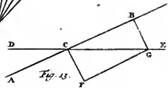

B


F
A
E
Fig. 6.
B
D
C


H
B
E
I


A
E
H
B
Fig. 10.
F
G
L
I
M
K
N
C
O
D


B
B
Fig. 12.
D
E
C
C
C
C
A


B
D
C
E
G
Fig. 13.
A
F

Roberval.

pressions nous sont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

Nous pouvons encore imaginer que la mesme ligne est décrite par un mouvement meslé de deux, l'un parabolique, l'autre droit, desquels nous pourrons en comprendre, un uniforme, comme si la parabole estant portée par un mouvement droit, en sorte que l'un de ses diamétres soit toûjours sur la ligne AB, un point C se promene de telle sorte dans la parabole, qu'il se maintienne toûjours dans la ligne DE; & en ce cas si la touchante de la parabole en C nous est donnée, nous connoistrons ces trois mouvemens, c'est-à-dire les vitesses de chacun des trois comparé aux deux autres, puisque leurs trois directions nous sont données, où vous remarquerez que la direction du mouvement droit simple est la ligne AB, c'est-à-dire, une ligne LCM parallele à AB. Pl. II. Fig. 1.

Ce que nous avons dit de la parabole se doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipse, & généralement de toute autre ligne; de sorte que la ligne DE pouvant estre entendue décrite par un mouvement composé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la mesme ligne pourra estre décrite par une infinité de mouvemens, chacun différent en espéce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d'une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence de cercle ABC, le centre du cercle D, & un point E dans le cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne EDA: vous voyez donc que si la ligne EDA tourne autour de E, & qu'en mesme temps un point B se promene sur la mesme ligne, en sorte qu'il se maintienne toûjours dans la circonférence ABC, cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voyez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous estant donnée en Pl. II. Fig. 2.

 un

un point, cette raison nous sera donnée en ce mesme point, comme si la touchante AF nous est donnée au point A, & la position de la ligne EDA, nous verrons que cette ligne estant perpendiculaire à AF, elle est la ligne de diréction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point E; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence ABC, par laquelle se doit faire ce mesme mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence ABC par son mouvement, n'a au point A qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est, AF.

Mais si l'on donne la touchante BG en un autre point de la circonférence, comme en B, le point E estant encore donné, nous menerons la ligne EB, qui sera la direction du mouvement droit, & BH sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point E; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante BG, nous connoistrons donc la vîtesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun d'eux aux deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eust donné les points E & B, & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de GH à BH, nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la mesme circonférence peut estre décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

Et pour finir en deux mots cette spéculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

Pro-

Propoſition quatrimé.

SI deux lignes droites faiſant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à ſe mouvoir parallelement chacune à ſoy-meſme, en telle ſorte qu'elles ſe puiſſent toûjours couper l'une l'autre, & que la vîteſſe de la premiére ſoit donnée dans la ſeconde, & la vîteſſe de la ſeconde donnée dans une troiſiéme, qui faſſe tel angle qu'on voudra au point de leur départ : le point qui ſe rencontrera toûjours dans leur commune ſection ſera porté par trois mouvemens, deux deſquels eſtant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la ſeconde ligne aura eſté haſté, quoy-que toûjours uniformement, en ſorte que par le mouvement compoſé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Toute cette propoſition eſt mal digerée, & il vaut mieux la paſſer que de s'y arreſter.

Cette propoſition ſeroit extraordinairement longue, c'eſt pourquoy nous expliquerons le reſte cy-aprés.

Suppoſons que la droite AB comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite AD, l'une & l'autre de ces deux lignes viennent à ſe mouvoir parallelement à ſoy-meſme & uniformement, AB vers D, & AD vers B, & que la vîteſſe de la ligne DA ſoit donnée dans AB, & la vîteſſe de AB ſoit donnée dans une troiſiéme ligne AC, en telle ſorte que lors que le point A de la ligne DA ſera arrivé en B, en meſme temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui ſe rencontre toûjours en la commune ſection des deux lignes AB, AD ſera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne AB, en ſorte que ladite ligne AB eſtant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne ſur AB, qu'il n'euſt fait ſi la vîteſſe du point A de la ligne AB euſt eſté donnée depuis A juſques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement meſlé de ces trois ſera le diamétré AE du parallellogramme DB, & que ſon mouvement ſur AE ſera uniforme. PL. II. Fig. 3.

La premiére partie de cette propoſition eſt aſſez intelligible de ſoy-meſme, car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne D A, & que la ligne A B ſe mouvant, en ſorte que ſon bout A décrivant la ligne A C, un point fuſt porté le long de A B, commençant ſon mouvement en A, à telle condition qu'il deuſt toûjours eſtre en la commune ſection des deux A B, A D; il eſt clair que ce point auroit deux mouvemens ſur la ligne A D, l'un A C, par lequel la ligne A B s'efforceroit de le porter d'A vers C, l'autre C D, par lequel il ſeroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne A D. Mais ſi ces deux mouvemens eſtant ainſi prouvez, nous faiſons encore mouvoir la ligne A D vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il ſuivra la ligne A D: il eſt donc vray qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore éxaminer en cette ſorte, poſé que le point A de A B deuſt parcourir A D, & que A de A D deuſt parcourir A B, il eſt certain que le point qui ſe rencontreroit toûjours ſur leur commune ſection ſeroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en noſtre premiére propoſition: mais faiſant que le point A de A B décrive A C, au lieu de A D, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne A B s'efforce de le porter le long de A C, ainſi pour luy réſiſter il faut qu'il ſe haſte davantage ſur A B, en ſorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'euſt fait, ſi A de A B euſt parcouru A D: donc le point a trois mouvemens, &c.

Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement compoſé de ces trois eſt droit & uniforme, & le long du diamétre A E. Car ayant tiré la ligne F H I G parallele à A B coupant, &c. lors que le point A de A B ſera en F, ſi la ligne A D n'a pas changé de place, le point de la commune ſection aura eû deux mouvemens uniformes A F, F H, que nous réduirons à un ſeul A H, par la premiére propoſition, en ſorte que ce point ſera en H, de la ligne A H D. Mais en meſme temps le point H de A H D a eſté porté en I par un mouvement uniforme H I: donc ce point de commune

mune section a esté porté par deux mouvemens uniformes A H, H I; & partant par la premiére proposition il a décrit la ligne A I, &c.

Notez qu'il n'estoit pas besoin de tirer F G, & que le mesme argument se pouvoit faire des lignes A C, C D, & les ayant réduites à A D, composer un mouvement des deux A D, & D E.

Cette proposition se doit entendre tres-généralement.

Ainsi si la ligne F C se meut parallelement à soy-mesme & uniformement, en sorte que son point F décrive la ligne F L, & qu'en mesme temps la ligne F O se meuve parallelement à soy-mesme & uniformement, en sorte que son bout F doive décrire la ligne F N, le point de commune section des deux lignes F C, F O, aura décrit la diagonale F M du parallellogramme O C. Quoy-que ce point ait esté porté de quatre divers mouvemens; * car les deux mouvemens qu'il a en F O, l'un par lequel il court de F vers O, l'autre par lequel la ligne F O tâche de le reculer pour luy faire décrire F N, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul F C, (car F C est le diamétre d'un parallellogramme F N C) & les deux mouvemens qu'il a en F C, l'un par lequel décrivant la ligne F C, il est porté de F vers C, l'autre par lequel la ligne F C tâche de luy faire décrire la ligne F L, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul droit & uniforme F O. Donc tous ces quatre mouvemens estant réduits aux deux

Pl. II. Fig. 4.

* *Je dirois ainsi : Le point* F *en* F C, *se mouvant vers* L M, *a deux mouvemens droits & uniformes*, F L, L O, *qui composent un mouvement droit* F O.

Semblablement ledit point F *en* F O, *se mouvant vers* N M, *a deux mouvemens* F N, N C, *qui composent* F C.

Donc des deux mouvemens F O, F C, *sera composé un mouvement* F M, *qui sera composé de tous ces quatre*, & F M *est diagonale*, *&c.*

deux FC, FO par la premiére propoſition, par la meſme propoſition le point de commune ſection des deux lignes FC, FO, aura décrit la ligne FM, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

Nous aurons beſoin de cette propoſition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-eſtre de quantité d'autres lignes.

PROBLEME I.

Propoſition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens meſlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de propriétez ſpécifiques, qui nous faſſent connoiſtre les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'Invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dés qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les propriétez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) éxaminez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

Le

La démonſtration eſt mot à mot dans noſtre principe. Et parce quelle eſt tres-générale, & qu'elle peut ſervir à tous les éxemples que nous en donnerons il ne ſera point à propos de le répéter.

Vous trouverez dans les éxemples ſuivans les touchantes des ſections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monſieur Paſchal, de la Roulette de Monſieur Rob., de la Parabole du ſecond genre de Monſieur Deſc. &c.

Premier éxemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de la décrire par la cinquiéme méthode générale de Monſieur Mydorge livre ſecond, propoſition 25. qui eſt telle. PL. II. Fig. 5.

Le ſommet & le foyer de la parabole eſtant donnez de poſition, trouver dans le meſme plan tant de points qu'on voudra par leſquels la parabole eſt décrite.

Soit A le foyer, & F le ſommet: ſoit tirée la ligne AF, & prolongée de F vers B, & ſoit FB égale à AF, la meſme ligne BFA ſera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la Parabole paſſera par les points E.

Cela poſé ſi l'on demande la touchante de la Parabole au point E, ſoit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à l'axe FAI, alors il eſt clair par la deſcription cy-deſſus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, eſt compoſé de deux mouvemens droits égaux dont l'un eſt la ligne AE, & l'autre eſt la

la ligne HE sur laquelle il se meut de mesme vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne AE par la construction, puisque AE est toûjours égale à BI. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connuë, sçavoir suivant les lignes droites AED, HE données de position, si vous divisez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC, qui est le diamétre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE, AE,) la ligne LEC sera la touchante.

Avant que de passer outre, remarquez deux choses. La premiére, que nous n'avons pas voulu considérer le point E comme commune section de deux lignes, dont l'une AE infinie se meut circulairement autour du point A; l'autre IE aussi infinie descend parallelement à soy-mesme, ayant toûjours son extrémité I dans la ligne BA, puisqu'il a esté plus facile de considérer les mouvemens AE, HE du point E en chaque endroit de la section de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens AE, HE sont égaux l'un à l'autre, ce qui sera vray, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'ensuit pas que tous les mouvemens d'un point E soient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en ayant qu'un réciproque de l'autre costé de la parabole & également éloigné du sommet. Vous entendrez la mesme chose en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que nostre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1: proposition 33, & pour le trouver en quelque façon analitiquement, posons qu'il soit vray que LEC touche la Parabole en E. Si donc nous abaissons l'ordonnée EI, IF sera égale à FC, & ajoûtant FB à IF, & FA à CF, les toutes CA & IB seront égales (car les ajoûtées le sont par la construction) mais IB est égale à AE par nostre construction, donc CA & AE sont égales, & l'angle ACE égal à l'angle AEC; mais par nostre construction nous avons divisé

viſé l'angle AEH en deux également, & par conſéquent nous avons fait AEC, CEH égaux entr'eux, donc ACE eſt égal à CEH ſon alterne, ce qui eſt vray, car par la conſtruction EH eſt parallele à CI.

Ou ſi vous aimez mieux, puiſque CI, EH ſont paralleles, l'angle ACE eſt égal à CEH; mais par la conſtruction CEH eſt égal à AEC, donc ACE & AEC ſont égaux, & le triangle ACE iſoſcéle, donc CA eſt égale à AE. Mais encore par la conſtruction AE eſt égale à BI, CA eſt donc égale à BI, & en oſtant les égales AF, BF, CF ſera égale à FI, & par conſéquent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi l'on nous euſt donné la deſcription de la parabole par un point, comme E ſe promenant le long de la ligne IE du mouvement uniforme, en meſme temps que la ligne IE deſcend parallelement à ſoy-meſme d'un mouvement tres-inégal, mais tel que le quarré de IE eſt toûjours égal au rectangle ſous IF, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas eſt le coſté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous eſtant donnée, & un mouvement égal dans la ſeconde IE trouver le mouvement qui ſe fait dans la troiſiéme FI, ce qui eſt un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore propoſer le moyen de décrire la Parabole par quelques autres de ſes propriétez, ce qui ſeroit plus difficile.

Second éxemple des touchantes de l'Hyperbole.

Nous la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette ſorte.

Le ſommet & les deux foyers ou points de comparaiſon de l'Hyperbole eſtant donnez de poſition, décrire l'Hyperbole par des points dans le meſme plan.

 Soient

Pl. II. Fig. 6. Soient les foyers A, B, & H le sommet, donc la ligne droite AB passera par H. Prenons HG égale à HA, & prenons dans HA, prolongée, s'il en est besoin, tant de points que nous voudrons, comme E, par lesquels de B comme centre décrivons des arcs de cercle EF, & du centre A & de l'intervale, dont chaque point E est éloigné de G, décrivons d'autres arcs de cercle CF, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, ayant prolongé AF, comme en L, & BF, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point F, qui est toûjours la commune section des deux lignes droites BFD, AFL, lesquelles se meuvent circulairement, la premiére autour du centre B, l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considére décrivant l'hyperbole à commencer du sommet, il a deux mouvemens ; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne AL ; l'autre, par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont FL, FD, ayant fait un rhombe duquel l'angle soit DFL, c'est à sçavoir, ayant divisé l'angle DFL en deux parties égales pour avoir le diamétre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne MFI qui partage cét angle sera la touchante de l'hyperbole.

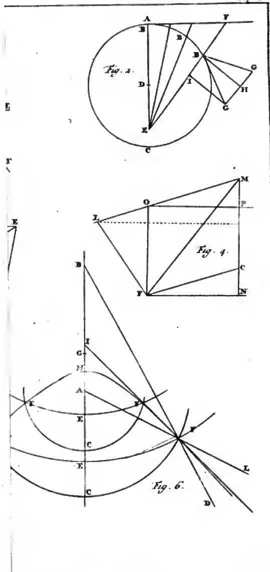
Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle IFA est égal à l'angle IFB.

Troisiéme exemple des touchantes de l'Ellipse.

Voicy comme M. Myd. la décrit par sa cinquiéme méthode générale, l. 2. prop. 27.

Pl. III. Fig. 1. Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse estant donnez de position, décrire l'Ellipse par des points trouvez sur le mesme plan.

Soient


Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.
Roberval

Soient les foyers ou points de comparaiſon A & B, & H le ſommet.

Donc la droite AB prolongée paſſera par H, ſoit pris HG égale à AH, & du centre B de tant & de tels intervales qu'on voudra plus grands, pourtant que AH, & moindres que BH, comme BE, décrivez des arcs de cercle, comme EF, & du centre A & de l'intervale, qui eſt entre chacun de ces arcs, & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipſe paſſera par les points EF.

L'Ellipſe eſtant ainſi décrite, s'il faut tirer ſa touchante comme en F, ayant tiré les lignes BFC & AFD, ſoit que je conſidére les deux mouvemens du point F en BC & AD, ou comme s'éloignant de B dans FC, auquel cas il s'approche d'A dans FA, ou comme s'éloignant d'A dans FD, auquel cas il s'approche de B le long de FB, puiſque le point F s'éloigne autant de l'un des points AB, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens ſont BFC & AFD, je n'ay qu'à diviſer l'un des deux angles AFC, ou BFD en deux également par la ligne IFM, elle ſera la touchante de l'Ellipſe. Pl. III. Fig. 2.

Apoll. dans la meſme 48. du troiſiéme veut que l'angle AFI ſoit égal à l'angle BFM, ce qui s'accorde à noſtre méthode, car les angles AFC, BFD (au ſommet l'un de l'autre) eſtant égaux, leurs moitiez AFI, BFM le ſeront auſſi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oubliois de mettre en deux mots la conſtruction de ces trois exemples, pour ſervir de régle générale.

Pour tirer les touchantes des ſections coniques.

POUR la Parabole, eſtant donné le ſommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallele à l'axe, & une autre ligne juſques au foyer, diviſez en deux également, des quatre angles que ces deux lignes font, les deux que la

Parabole coupe, la ligne qui fera cette diviſion fera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipſe, les deux foyers eſtant donnez par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers, des quatre angles que ces lignes feront en ce point, diviſez en deux également les deux oppoſez que la ſection conique coupe, la ligne qui fera cette diviſion fera la touchante.

Quatriéme exemple des touchantes de la Conchoïde de deſſus, de Nicomede.

BIEN que l'on puiſſe décrire une infinité de lignes courbes, chacune deſquelles fera conchoïde & aſymptote à une meſme ligne droite, ſi eſt-ce que nous n'en conſidérons que de deux ſortes ou genres, ſuivant qu'elles ſont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur ſert de baſe, régle, ou aſympote, ce que nous appellons la conchoïde de deſſous; ou que cette ligne droite ſoit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de deſſus, ou de Nicomede; parce que, quoy-que leurs courbures ſoient toutes différentes les unes des autres, néanmoins la méthode pour en trouver les touchantes n'en conſidére que ces deux cas.

Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas eſtre dans la ligne qui ſert de régle ou de baſe à la conchoïde, car la ligne qui ſeroit décrite de cette ſorte ſeroit un demy-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit priſe pour baſe de la conchoïde, ſeroit le diamétre, &c.

PL. III. La Conchoïde de deſſus ſe décrit en cette façon.

Fig. 3. Soit la droite infinie AD à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le ſommet ſoit C. Du point C tirez CD perpendiculaire à AB coupant AB en E, & dans CD prenez un point comme D, en ſorte que la ligne AB ſoit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme DGF, DIH, &c. vers la ligne AB qui la rencontrent en G, I, L, &c. puis

puis prenez les lignes GF, IH, LK chacune égale à EC, la Conchoïde passera par les points FHK &c.

Ayant ainsi décrit la Conchoïde, il sera facile d'en tirer les touchantes, par éxemple au point F. PL. III. Fig. 4.

Considérons que la conchoïde est décrite par deux mouvemens du mesme point; l'un par lequel il monte le long de la ligne DF; l'autre par lequel la ligne DF se mouvant circulairement sur le centre D, emporte le mesme point de C par F vers N; & bien que nous sçachions que les directions de ces deux mouvemens sont l'une la ligne DF pour le mouvement droit, l'autre FK perpendiculaire à DF par nostre principe, pour le mouvement circulaire, si est-ce que nous n'en sçaurions découvrir la raison ne les considérant que dans la conchoïde si nous ne connoissons la touchante de la conchoïde, qui est la direction du mouvement composé de ces deux. Cela nous oblige à éxaminer ou les mesmes mouvemens, ou d'autres qui leur soient proportionnez hors de la conchoïde.

Or il est tres-facile de les éxaminer dans la ligne droite, qui est la régle ou base de la conchoïde, si nous considerons qu'elle est décrite par un point G, qui monte dans la ligne DGF, autant que fait le point F dans la mesme ligne DGF; car puisque les lignes EC, GF sont égales par la construction, l'excés de la ligne DF sur la ligne DC est le mesme que l'excés de DG sur DE. Donc le point E est autant monté allant de E jusqu'à G, que le point F allant de C jusqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non-seulement nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous estant données, mais aussi nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

Tirez GH perpendiculaire à DG; d'un point de DH comme H, tirez HI parallele à DG, qui coupe la regle EGB en I: vouz avez donc la raison du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de GH à HI; & puis que le mouvement

droit G eſt égal au mouvement droit F, reſte d'avoir la raiſon du mouvement circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens ſont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'eſt-à-dire en meſme raiſon que leurs demi-diamétres DF, DG, il faut donc faire que comme DG à DF, ainſi GH ſoit à une ligne priſe dans FK. Or la conſtruction en eſt tres-aiſée, car vous n'avez qu'à tirer la ligne DHK rencontrant FK en K, dautant que les triangles DGH, DFK ſeront ſemblables. Vous avez donc la raiſon du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de FK à KL ou HI. Donc ſi par K vouz tirez KL parallele à DF, & égale à HI; puiſque les deux FK, KL ſont les directions des deux mouvemens F, & en meſme raiſon que ces deux mouvemens, la droite LF eſtant menée, elle ſera la direction du mouvement compoſé de ces deux, c'eſt-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la régle AB de la Conchoïde eſtant donnez de poſition, & un point de la Conchoïde F, tirez DF qui coupe AB en G, ſur les points G & F, tirez GH & FK perpendiculaires à DF, faites l'angle FDK aigu *ad libitum*, tirant la ligne DK qui coupe GH en H, & FK en K, tirez HI parallele à DF coupant AB en I, puis tirez KL égale & parallele à HI, le point L ſera dans la touchante au point F.

Remarquez que dautant que la Conchoïde change de courbure, le point L ſe peut rencontrer entre la Conchoïde & ſa baſe ou régle AB, puis qu'en ce cas le convexe eſtant en dedans, la ligne LF la touche auſſi en dedans entre la droite AB.

Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces meſmes lignes qu'au point de l'attouchement; en la Conchoïde tout au contraire, la ligne FL eſtant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, eſtant prolongée du coſté du ſommet C de la Conchoïde, rencontrera la Conchoïde comme en Q, ce qui eſt évident,

dent, puis que ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'estant point paralleles à la ligne AB, rencontrent nécessairement la mesme ligne; partant, puis que l'inclinaison de la touchante FL est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & AB, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne pourra pas faire, quoy-qu'elle ait son inclinaison sur AB, de mesme costé que L: dautant que vers cét endroit elle est plus proche de AB que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou audelà, comme en Q, dautant qu'elle s'éloigne de AB vers ce costé la, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

Cinquiéme exemple des touchantes de la Conchoïde de dessous.

NOUS nous servirons mot à mot de la régle de l'exemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que sçavoir décrire cette ligne.

Soit la ligne droite & infinie AB, que nous prenons pour la régle ou base de nostre Conchoïde de dessous, & d'un point de la mesme ligne comme E, soit la perpendiculaire ED à la mesme ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points C & D, le plus proche C pour le sommet de nostre Conchoïde, & le plus éloigné D pour son Pole: alors ayant tiré au point D quantité de lignes occultes DMN, qui coupent AB en N, si en chacune de ces lignes DMN de son point N, nous prenons NM égale à CE, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel nostre Conchoïde est décrite. Pl. IV. Fig. 1.

Cela posé, puis que la seule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent sa base, d'une part; & les mouvemens semblables qui décrivent la premiére Conchoïde, & sa base n'est autre, sinon qu'en celle-cy le mouvement circulaire de la ligne est moin-

moindre que le mouvement circulaire de sa base, au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivoit la ligne estoit le plus grand, & qu'en l'une & en l'autre le mouvement droit de la ligne est égal au mouvement droit qui en décrit la base, & qu'encore en l'une & en l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moyen d'une ligne DKH, qui fait un angle aigu GDH arbitraire avec la ligne GD, & laquelle ligne DKH coupe les lignes GH, FK perpendiculaires à la ligne DG aux points H & K: voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne DF, que je prolonge jusques à ce qu'elle rencontre la régle AB en G, & sur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires FK, GH, qu'une ligne arbitraire DH coupe en K & en H; du point H je tire HI parallele à DG coupant AB en I. J'ay donc, comme nous avons déja dit au précédent éxemple, la raison du mouvement circulaire du point G de la ligne DG (posé que ce point doive décrire la régle AB) au mouvement droit du mesme point, comme GH à HI; mais ce mouvement estant GH, le mouvement circulaire du point F de la ligne DFG décrivant la Conchoïde sera FK, & le mouvement droit du point F est égal au mouvement droit du point G: je tire donc KL égale & parallele à HI; & puis que la Conchoïde, & par consequent sa touchante est décrite par un mouvement meslé des deux FK, KL, la ligne LF sera sa touchante au point F; ce qu'il falloit faire.

Sixiéme exemple de quelques autres Conchoïdes.

L'on peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes aussi-bien qu'à la ligne droite; & pour en trouver les touchantes, il faut premiérement connoistre la touchante de la ligne courbe, qui est comme la régle ou base de la Conchoïde: or nous n'avons pas eû besoin d'une touchante de la régle ou base aux deux éxemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes

lignes courbes qui ayent des touchantes; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'ayant point d'autre touchante, elle peut estre considérée comme se touchant soy-mesme, & que c'est en cette façon que nous l'avons considérée aux deux exemples précédens.

Pour donner un éxemple de ces Conchoïdes, soit proposé un cercle duquel le rayon est AB, le centre A, & soit pris un point dans AB, prolongée, ou non, comme C, lequel nous prendrons pour le Pole de nostre Conchoïde; puis ayant prolongé CAB hors le cercle, comme en D, soit pris BD arbitraire pour l'intervale de nostre Conchoïde; enfin du Pole C tirons quantité de lignes occultes CEF coupant le cercle en E, & prenons du point E dans lesdites lignes les intervales EF égaux à BD, & d'une mesme part que BD, c'est-à-dire, en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamétre prolongé, ou en dedans si le point D a esté pris en dedans, cette Conchoïde passera par les points FFF &c. PL. III. Fig. 5.

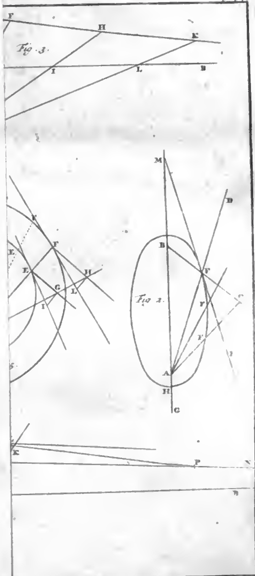
Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est décrite par un mouvement meslé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous estant donnée, il est tres-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F, ayant tiré la ligne CF qui coupe la circonférence du cercle en E, & des points F, E, ayant tiré les perpendiculaires FH, EG sur la ligne CF; il est aisé de remarquer que la ligne CBD ayant tourné sur le centre C, & ayant changé la position par laquelle elle n'estoit qu'une mesme ligne avec CEF, son point B est descendu en E, pour décrire le cercle, & son point D est descendu en F, pour décrire la Conchoïde du cercle, & qu'il s'ensuit que la ligne CEF est la direction du mouvement droit de chacun de ces points, & de celuy qui décrit le cercle, & de celuy qui en décrit la Conchoïde, & les lignes EG, FH sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux, puis que la différence des lignes CD & CF est é-

gale à celle des lignes CB & CE, de forte qu'il ne reste qu'à connoistre la quantité de l'un de ces mouvemens droits, & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cét effet tirez EI touchante du cercle, & CH qui fasse un angle aigu avec CF (comme nous avons fait en la Conchoïde cy-dessus) & qui coupe EG, FH en G, H: les directions des trois mouvemens EC, EG, EI estant données trouvez-en les proportions, ce que vous ferez tirant GI parallele à CF, le mouvement droit du point E sera GI, & son mouvement circulaire sera EG: mais le mouvement circulaire estant EG, le mouvement circulaire du point F est FH (à cause que ces deux mouvemens sont entr'eux, à sçavoir EG à FH, comme le demidiamétre CE est à CF) vous n'avez donc qu'à prendre HL égale & parallele à GI, pour le mouvement droit du point F, & tirer la ligne de direction LF de celuy que les deux FH & HL composent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

Dans la figure de cét exemple nous avons pris le point C au dedans du cercle, & le point D en dehors: nous eussions pû les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de sorte que nostre Conchoïde eust fort approché de la figure d'une Ellipse. Enfin de quel intervale que nous eussions décrit nostre Conchoïde, si nous eussions pris pour son Pole le point A centre du cercle, il est évident que nostre ligne eust aussi esté un cercle: mais ces choses estant tres-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'ayant en toutes ces lignes qu'une mesme application, nous ne nous y arresterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en passant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette mesme méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipse & aux autres sections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, mesme aux Conchoïdes &c. & en tout ces

cas


Fig. 3.
Fig. 2.

cas l'application de noſtre méthode de tirer les touchantes ſera toûjours la meſme, ſi nous ſuppoſons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous éxaminons la conchoïde, ou des propriétez ſpécifiques pour la trouver.

Septiéme éxemple, du Limaçon de M. P.

C'eſt encore une eſpéce de Conchoïde de cercle, de laquelle voicy la deſcription.

Soit propoſé le cercle CG BE, duquel le centre eſt A, le diamétre BC prolongé autant qu'il ſera beſoin, comme en D; ſoit pris B pour le Pole de noſtre Limaçon, & CD pour l'intervale duquel on ſe doit ſervir pour le décrire, moindre que le diamétre. De B tirez quantité de lignes occultes BEF, qui coupent la circonférence du cercle en E, & prenez EF en chacune de ces lignes égale à CD, & de meſme coſté, le Limaçon paſſera par tous ces points F, F. Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervales que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui eſt d'un meſme coſté que le Limaçon au regard de la ligne DCB, & que voulant continuër cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a ſa concavité tournée vers le Limaçon, ainſi le point B du Limaçon eſt le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que BG eſt égale à CD; & le dernier point du limaçon que nous avons marqué d'une petite * eſt le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & * ſont les réciproques des points de la circonference GC, comme les points les plus proches de B audeſſus du diamétre CB dans le meſme Limaçon, ſont les réciproques des points de la circonférence GB, ainſi H eſt le réciproque du point I juſqu'au point K qui eſt le réciproque du point B, & vous voyez par là la vérité de ce que nous avions remarqué que l'intervale CD ne doit pas eſtre plus grand que le

Pl. IV. Fig. 2. *Cette propoſition eſt vraye, mais elle eſt expliquée en ce lieu avec beaucoup de confuſion.*

diamétre CB, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion B du Limaçon, mesme selon les divers intervales que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du mesme Limaçon la plus proche de B audessus du diamétre CB. Il est vray que pour ce qui est de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne soit grande ou petite, entiére & terminée en un point du demi-diamétre AB, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la description de l'une & de l'autre de ces lignes estant par tout les mesmes, l'on en donne les touchantes de la mesme façon. Mais voulant éxaminer une autre moyen de décrire cette ligne, & dire quelque chose de son usage, ce que nous ferons cy-apres, il y a fallu ajoûter cette restriction.

Pl. IV. Fig. 3. Il est aussi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes précédentes, la méthode en est la mesme, & les deux mouvemens l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, se doivent éxaminer de la mesme façon: car il faut considérer que la ligne BEF se mouvant circulairement autour du Pole B jusqu'à ce qu'elle ait la position de BCD, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne vers D: or puisque EF est égale à CD, la différence des lignes BE, BC est égale à la différence des lignes BF, BD; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le mesme mouvement droit dans la ligne BEF, que le point F qui décrit le Limaçon, de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoistrons aussi le mouvement droit du point F: il reste donc à éxaminer les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne BEF. Tirez donc les perpendiculaires EG & FQ, & prenez dans EG sa partie EG *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne BGQ, puis faites que comme le demi-diamétre BE est au demi-diamétre BF, ainsi EG soit à QF (ce qui se fera par le moyen de la ligne BGQ, faisant un angle aigu *ad libitum* avec BF, & coupant EG en G, & FQ en Q) supposé donc que le mouvement circu-

circulaire E soit EG, la quantité du mouvement circulaire F sera FQ; mais supposé EG pour la quantité du mouvement E, l'on trouve que le mouvement droit E est égal à GP (ce qui se fait, ayant tiré la touchante du cercle PE, par le moyen de la ligne GP parallele à BE, & coupant la touchante en P) comme nous avons remarqué, & le mouvement droit de F est égal à celuy de E, comme nous l'avons expliqué cy-devant. Supposé donc FQ pour la quantité du mouvement circulaire F, le mouvement droit sera GP, c'est-à-dire QR égale & parallele à GP; le point R est donc donné, & par mesme moyen RF pour la direction & la quantité du mouvement meslé des deux FQ, QR, c'est-à-dire, nostre touchante; ce qu'il falloit faire.

Remarquez qu'on doit toûjours éxaminer les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celuy de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante; comme par éxemple, si l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point H assez proche de B, ayant tiré la ligne HB, & l'ayant prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en I, qui sera dans le cercle le point réciproque du point H, comme C est réciproque de D, car par la construction HI, est égale à CD, il faudra éxaminer les deux mouvemens du point I, & en ayant trouvé la raison, chercher la raison de son mouvement circulaire au mouvement circulaire de H &c. En deux mots imaginant que la ligne HI tourne sur le point B, & que la partie BI est portée en dedans du cercle vers C, ayant tiré la perpendiculaire IL vers le costé de C, & par conséquent la perpendicülaire HN vers l'autre costé, pour les deux directions circulaires; puis ayant trouvé la raison, des deux mouvemens I, comme de IL à LM (par le moyen de MI touchante du cercle BIC) &c. il faudra faire que comme BI est à BH, ainsi IL soit à HN, puis ayant pris NO égale & parallele à LM, la ligne OH menée par les points O & H, sera la touchante de nostre Limaçon.

L'on peut dire que cette ligne est décrite par le moyen d'une

 double

PL. IV. Fgi. 4. double équerre CEFB, de laquelles les costez CE, EB sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamétre CAB du cercle CEB, & l'autre costé EF est toûjours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon; de sorte que faisant tourner l'angle droit CEB, en sorte que son point E décrive le demi-cercle CEB, ce qui se fait luy donnant diverses positions, & toutes dans un mesme plan, & à condition que la ligne CAB doive estre toûjours l'hypotenuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de CE & EB, l'on n'a qu'à marquer dans le mesme plan tous les points que le point F de la double équerre aura décrit.

Or sur cette supposition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la mesme façon que nous avons déja fait, parce qu'encore qu'on ne considére pas le point F, comme se promenant le long de la ligne BEF, & mesme que cette ligne tourne circulairement sur le Pole B, l'on ne laisse pas de connoistre les deux mouvemens que luy donne la ligne BEF, qui en cette seconde supposition tournant sur le point B, s'éleve en mesme temps peu à peu pour conduire l'angle droit BEC de B en C sur la circonférence du demi-cercle BEC.

Mais voicy une des belles spéculations qui se puisse sur la description de cette ligne, & par le moyen de laquelle elle a esté trouvée par le sieur de Roberval.

Soit proposé le cercle CEB, & l'intervale CD comme aux figures précedentes: du point C & de l'intervale CD soit décrit le cercle DG*; je dis que si ce dernier cercle DG* est la base d'un Cone scalene du sommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire SB tombe en B sur le plan du cercle DG*; ayant tiré des touchantes GF à ce cercle, & du point S tiré des lignes SF perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F sera dans nostre Limaçon, ou si vous aimez mieux que la ligne qui passe par tous ces points F, F, est la mesme que le Limaçon du cercle

cle CEB, dont le Pole eſt B, & l'intervale eſt CD. Car ſi du point B vous joignez la ligne BF, il eſt certain par un coroll. de la 6. du 11. qu'elle ſera perpendiculaire à GF. Du centre C tirez CE parallele à GF, & qui coupe BF en E; GE ſera donc un parallelogramme réctangle, & la ligne EF ſera égale à CG, c'eſt-à-dire à CD; mais l'angle CEB eſtant auſſi droit, il eſt dans un demi-cercle décrit ſur le diamétre CB. Il s'enſuit donc que nous trouverons toûjours un meſme point F, ſoit ayant décrit le cercle DG*, & ayant tiré ſa touchante GF, & de S ſommet du Cone ayant mené la ligne SF, ſoit ayant décrit un cercle CEB, & tiré la ligne BEF coupant le cercle en E, & pris EF égale à DC demi-diamétre du premier cercle: mais nous avons montré que trouvant des points F par cette ſeconde méthode, nous décrivons le Limaçon du cercle CEB, & partant trouvant les points F de la première façon, puiſque ces points ſont les meſmes, nous décrirons auſſi noſtre Limaçon; ce qu'il falloit démontrer.

Je diray en paſſant une propriété de la petite portion de cette ligne, qui eſt telle que ſi l'on prend l'intervale DC égale au demi-diamétre CA, du cercle auquel on décrit le Limaçon, & que de cét intervale l'on décrive le Limaçon, ſa petite portion *B ſervira à couper un angle réctiligne propoſé en trois parties égales. Cette propriété eſt du ſieur Paſcal. Pl. IV. Fig. 5.

Car ſoit propoſé l'angle DBH, dans l'une des deux lignes, qui le contient, comme DB, je prends le point *, duquel j'abaiſſe *I perpendiculaire ſur l'autre ligne BH, & qui coupe la partie *KB du Limaçon (décrit du Pole B au cercle dont le centre eſt *, le rayon *B & l'intervale du meſme Limaçon CD eſt égal à *B) en K, je tire la ligne BKL, je dis qu'elle fait avec la ligne BH l'angle KBH $\frac{1}{3}$ de l'angle propoſé CBH.

Pour le prouver ſoit décrit le cercle du Limaçon & la ligne BK prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L, tirez L*, & ayant diviſé *K *biſariam* en M, joignez

L M,

L M, laquelle ſera perpendiculaire ſur * K; car à cauſe du Limaçon, le triangle * L K a les coſtez L *, & L K égaux, eſtant égaux à un meſme C D. Puis donc que les triangles L M K, B I K ſont réctangles, & ont les angles oppoſez égaux, ils ſont ſemblables, & l'angle M L K égal à I B K, mais M L K n'eſt que la moitié de l'angle * L K (parce que le triangle * L K eſt iſoſcele, & ſa baſe * K diviſée *biſ.* &c.) c'eſt-à-dire, de * B L, (car le triangle * L B eſt encore iſoſcele) & partant l'angle K B H n'eſt que $\frac{1}{2}$ de l'angle * B L, & partant $\frac{1}{3}$ du tout * B H; ce qu'il falloit démontrer.

Nota ſi l'on euſt propoſé l'angle obtus H B O en ayant oſté l'angle droit D B O, & pris H B K $\frac{1}{3}$ du reſtant, il ne faut que luy ajoûter un angle de 30. degrez qui eſt $\frac{1}{3}$ de l'angle droit, pour avoir le tiers du total propoſé D B O.

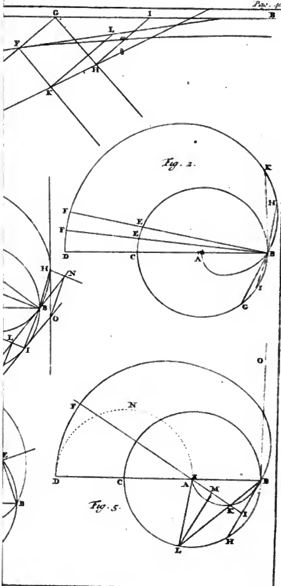
Monſieur de Roberval démontre que l'eſpace contenu ſous la ligne droite D C * (ſoit que D C ſoit égale ou non à C *) & ſous la courbe * K B F D eſt égal à l'aggregé du cercle B H C, duquel la ligne * K B F D eſt le Limaçon, & du demi-cercle duquel l'intervale de cette meſme ligne C D eſt le demi-diamétre, de ſorte que ſi du centre C & de l'intervale C D l'on décrit le demi-cercle D N * l'eſpace curviligne contenu entre cette demi-circonférence, & le Limaçon eſt égal au cercle B H C, dont cette ligne eſt la Conchoïde.

Si l'on continuoit cette ligne de l'autre coſté du cercle elle repréſenteroit une ſorte de figure en cœur diviſé en deux ſuperficies curvilignes, deſquelles l'on pourroit faire un ſemblable éxamen, les comparant à des portions de cercle &c.

De la Spirale ou Hélice.

LA premiére définition du Livre des Spirales d'Archiméde nous apprend le moyen de décrire cette ligne; voicy les termes d'Acrhiméde.

Si



Roberval.

Si recta linea in plano, manente altero termino, æquè velociter circunducta rursùs restituatur in eum locum à quo primùm cœpit moveri; & unà cum lineâ circumductâ, punctum feratur æquè velociter ipsum sibi ipsi, in eadem linea, incipiens à termino manente; ejusmodi punctum spiralem lineam in plano describet.

Soit proposé la ligne A B égale à l'intervale duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervale A B décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, divisez-en la circonférence en autant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & divisez la ligne A B en tout autant de parties égales; tirez les rayons A 1, A 2, A 3, &c. du point A sur le rayon A 1 prenez une des parties aliquotes du rayon A B; sur le rayon A 2 prenez deux des mesmes parties; 3 sur A 3, 12 sur A 12, 15 sur A 15, & ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres seront dans la Spirale que vous voulez décrire. PL. V. Fig. 1.

Que si dans la mesme ligne AB vous prenez BC, CD, DE &c. tant que vous voudrez, chacune égale à AB, & que cependant qu'AB fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui estoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne ABCD jusques en C, ce point décrira l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions. PL. V. Fig. 2.

D'où il s'ensuit que la méthode est la mesme pour les autres révolutions que pour la premiére; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra décrire du centre A de l'intervale AC une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la premiére circonférence du rayon AB, à quoy les mesmes rayons tirez du centre A aux points de la premiére circonférence serviront s'ils sont prolongez; & chacun pris égal à AC; sur le rayon A 1 de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à AB+1 de ses parties aliquotes, sur A 2 vous prendrez une ligne égale à AB+2 de ses parties ali-

aliquotes &c. & ainſi les points que vous aurez marquez ſur les demi-diamétres de ce ſecond cercle feront ceux par leſquels il faudra décrire la ſeconde révolution de l'Hélice.

. Cecy poſé, il faut conſidérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il ſe trouve, a toûjours le meſme mouvement droit ſur la ligne ABCDE; & ce mouvement eſt tel par la nature de cette ligne, qu'en meſme temps que la ligne AB a fait une révolution, ce point doit en meſme temps avoir parcouru une ligne égale à AB, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de ſorte que la viteſſe de ſon mouvement circulaire s'augmente toûjours à meſure qu'il s'éloigne du centre A; car ſon mouvement circulaire eſt tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne **ABCDE**, depuis A juſqu'où ce point ſe rencontre, eſt le demi-diamétre pendant le temps d'une révolution, c'eſt à ſçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par ſon mouvement droit la ligne AB depuis A juſques en B, ou de B en C, de ſorte que puis qu'en B ſon mouvement eſt tel que s'il en euſt toûjours eû un circulaire égal depuis A juſques en B, il auroit décrit une circonférence dont AB eſt le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C eſt tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainſi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribuë plus ordinairement à la Spirale meſme) il auroit décrit une circonférence dont le rayon eſt AC double de AB, il s'enſuit que le mouvement circulaire qu'il a en C eſt double de celuy qu'il a en B, & que celuy qu'il a en D eſt triple de celuy qu'il a en B &c. & ainſi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point eſt tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne ABCD, il doit décrire une circonférence de cercle dont la ligne, depuis le commencement A de la Spirale juſqu'à l'endroit de la Spirale où ce point ſe trouve, eſt le demi-diamétre: & de plus

plus le mesme point doit décrire par son mouvement droit pendant le mesme temps d'une circulation, une ligne égale au rayon AB du cercle de la premiére circulation; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du mesme point, comme de ladite circonference à la ligne AB, mais aussi les deux directions de ces mouvemens sont données (le commencement de la spirale & le point où l'on veut la touchante estant donnez) car la direction du mouvement droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne; ces deux mouvemens sont donc tout-à-fait connus, & par conséquent le mouvement meslé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Helice en ce point est aussi donnée; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins AB, & je tire BE perpendiculaire à AB, laquelle BE je suppose estre égale à la circonférence, dont AB est le rayon; puis ayant mené EF parallele & égale à AB, la ligne FB touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toûjours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons icy que nostre construction s'accorde avec les propositions d'Archiméde: car soit AG perpendiculaire à AB, il est évident que FB prolongée la rencontrera en un point comme G, puis qu'elle rencontre BE sa parallele par la construction, & partant l'angle AGB sera égal à l'angle EBF, & ces triangles semblables; mais le costé AB est égal au costé EF, & partant AG sera égal à BE, c'est-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui est vray par la 18. du livre des Spirales. PL. V. Fig. 3.

De mefme pour le point C, qui eft la fin de la feconde révolution, tirant CH perpendiculaire à AC, & égale à la circonférence dont AC eft le rayon, puis tirant HI égale & parallele à AB, & joignant IC ce fera la touchante: nous démontrerons qu'eftant prolongée, elle coupera AGK, prolongée comme en K, & que les triangles IHC, CAK feront femblables: donc comme AC eft à HI, ainfi AK fera à CH, c'eft-à-dire le double de CH à CH, & partant AK eft le double de la circonférence dont AC eft le rayon; ce qui eft vray par la 19. des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la première révolution, comme en L, je tire AL & je décris la circonférence LOPL coupant AB en O, je prends LM perpendiculaire à AL, & égale à ladite circonférence; par M je tire MN parallele à AL, & égale à AB rayon de la première révolution, NL eft la touchante, car foit tirée APQ perpendiculaire à AL, par la mefme raifon NL prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme AL ou AO eft à MN ou AB, ainfi fera AQ à LM, c'eft-à-dire à toute la circonférence OPL: mais par la nature & par la defcription de l'Hélice, comme AO eft à AB, ainfi la portion OPL de ladite circonférence eft à toute la circonférence, donc la ligne APQ eft égale à la portion OPL de la circonférence OPL; ce qui eft auffi démontré dans la 20. propof. des Spirales d'Archiméde.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la feconde révolution, comme en R, je tire AR & je décris la circonférence RVXR coupant ABC en V; je prends RS perpendiculaire à AR & égale à cette circonférence, & je tire ST parallele à AR, & égale à AB; TR eft la touchante: car par la mefme raifon ayant tiré AQΩ perpendiculaire à RA, la ligne TR prolongée la rencontrera comme en Ω, & comme AR ou AV fera à TS ou AB, ainfi AΩ fera à SR, c'eft-à-dire

à-dire à la circonférence RVXR: mais par la nature de la Spirale, comme AV est à AB, ainsi la circonférence RVXR estant jointe à la circonférence VXR, est à la mesme circonférence RVXR; & partant AΩ est à la circonférence RVXR, comme la mesme circonférence RVXR jointe à la circonférence VXR est à RVXR, donc la ligne AΩ est égale à l'aggrégé des deux circonférences RVXR & VXR, ce qui est vray par la 20. du livre des Spirales d'Archiméde.

L'on pouvoit dire d'abord tirez AR, & AXΩ qui luy soit perpendiculaire & égale à l'aggrégé de la circonférence RVXR & de VXR, on aura la touchante ΩR; ou bien ayant tiré AR & ayant décrit la circonférence du centre A & de l'intervale AR, & semblablement RY perpendiculaire à AR, faites que comme AB est à AR, ainsi cette circonférence du cercle soit à RY perpendiculaire, vous aurez le point Y; tirez YZ égale & parallele à AR, vous aurez le point Z, & ZR sera la touchante.

Mais il a semblé plus clair & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite AB & à la circonférence, dont AR est le demi-diamétre, & ainsi des autres.

Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonférences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui estant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant une ligne droite égale à une circonférence de cercle, l'on peut par la connoissance des mouvemens composez concevoir qu'elle sera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point proposé: nous ferons la mesme supposition pour la quadratrice.

Exemple neuviéme de la Quadratrice.

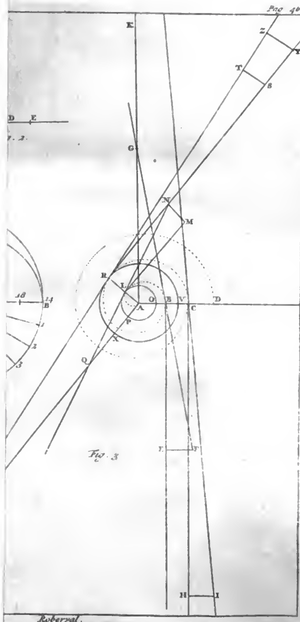
PL. VI. Fig. 1. *Cette propoſition eſt trop longue & fort embrouillée.*

SOIT propoſé le quarré ABCD avec ſon quart de cercle ABD qui luy eſt inſcrit, duquel le centre eſt A, & le rayon eſt AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, ſuivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit diviſé l'un des coſtez du quarré CB, ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5. &c. & par ces points ſoit tiré des paralleles à AB juſques au coſté oppoſé; diviſez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5. &c. à condition que ſi aux diviſions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez auſſi à compter au quart de cercle 1, proche de B; mais, ſi vous aviez commencé en C, vous commencerez en D ſur le quart de cercle; tirez du centre A des demi-diamétres juſqu'aux points de ces diviſions du quart de cercle A1, A2, A3, &c. là où A1 coupera la premiére des paralleles, A2 la ſeconde, A3 la troiſiéme, A4 la quatriéme &c. vous aurez les points par où doit paſſer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le ſommet H eſt dans la ligne AB.

Nota que *Viete Reſponſ. lib.* 8. *cap.* 8. appelle le point H *finis Quadratariæ*; mais il n'en conſidere que la portion HD pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne audeſſous du diamétre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale à AD, laquelle je diviſe en autant de parties égales que je juge à propos 1 2 3 4. &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des paralleles au diamétre du cercle BAE, leſquelles je prolonge audeſſous de DF, autant qu'il eſt néceſſaire; puis je diviſe le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ay diviſé la ligne DF, à commencer auſſi en D; par ces points & par le centre A je ti-

re



Pag. 46.
K
Z
Y
T
S
D
E
G
N
M
R
L
A
O
B
V
C
D
P
X
Q
3
Fig. 3
H
I
Roberval.

re des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallele réciproque, c'est-à-dire A 1 la première, A 2 la seconde &c. & par ces divisions je décris la portion D I de la mesme quadratrice prolongée.

Or il est manifeste que cette portion peut estre prolongée à l'infini, car ayant pris une tres-petite portion F*b* de la ligne FD, & une partie proportionnelle EL du quart du cercle, l'une & l'autre estant divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dit, nous trouverons un point de la quadratrice: mais derechef l'on pourra diviser la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ &c. partie plus proche de F de la ligne F*b*, & la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ partie plus proche de E de la circonférence LE, & tirer de nouveau des lignes paralleles, & des demi-diametres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux points de la quadratrice; & puis que l'on peut continuer ces divisons sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice audessous de D, & de I; car pour la finir, il faudroit que la derniére ligne tirée du point F de la ligne ADF parallele à AE rencontrast son demi-diamétre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quart de cercle DE, c'est-à-dire que FG perpendiculaire à DF en F rencontrast le diamétre BAE prolongé, auquel elle est parallele; ce qui est impossible.

Et par là vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans FG, puisque le demi-diamétre réciproque à FG ne la sçauroit jamais rencontrer: elle ne la coupera donc pas quoyqu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toûjours de plus en plus, car les points de la Quadratrice sont trouvez dans les paralleles à FG que l'on tire par des points toûjours plus proches de F que leurs précedentes, & partant la ligne FG est Asymptote de la quadratrice.

L'on peut achever le cercle entier, & continuër la quadratrice de l'autre costé du diamétre BE, avec son Asymptote &c.

Je ne dis rien ni du nom de la Quadratrice ni de son usage pour

la

la quadrature du cercle au defaut de Dinostrate ou de Nicoméde, qui ne se trouvent point. *Voyez Pappus lib.* 4. *Collect. M.* ou *Viete lib.* 8. *resp. cap.* 8. *& Clavius Geom. pract. lib.* 7. *in appendice.*

Pour tirer par cette méthode les touchantes à la Quadratrice, il faut examiner les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamétre AD du cercle BDE estant prolongé & tournant circulairement sur le centre A, & la ligne CD se mouvant en mesme temps parallelement à soy-mesme, soit qu'elle s'approche de BA, ou qu'elle s'en éloigne suivant que nous faisons tourner le demi-diamétre, ou de D vers B, ou du mesme D vers E, car tout revient au mesme, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne CD luy communique, l'autre circulaire à cause du mouvement du demi-diamétre AD; mais outre ces mouvemens il a encore celuy qui l'oblige à se rencontrer dans la commune section des deux lignes AD, CD, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatriéme proposition de ce Traité où vous trouverez une figure tres-semblable à celle-cy. En voicy pourtant l'application le plus intelligiblement qu'il m'est possible.

Pl. VI. Fig. 2. Soit proposé la quadratrice HDF, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moy ce mot, soit BDE & le centre du demi-cercle soit A, & que l'on demande la touchante de la Quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamétre BHAE de part & d'autre, puis je tire la ligne AF, qui est celle qui communique le mouvement circulaire au point F; je tire encore par F une parallele au diamétre BE, c'est celle qui communique à nostre point le mouvement droit duquel la direction est FK parallele à DA & perpendiculaire à AE. Par F je tire FR perpendiculaire à AF pour la direction du mouvement circulaire. Et ayant supposé que la ligne AF tourne circulairement de D vers B ou de F vers G, du centre A je décris la portion de la circonférence FCG comprise entre les lignes AF & ABG. Cecy posé je suis obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallele

à

à ABG ſe meut de F vers ladite ABG, & par la nature de cette ligne, puiſque cette parallele doit s'ajuſter & ne faire qu'une ligne avec AB lors que la ligne AF ayant tourné de F vers LG aura la meſme poſition. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrémité de ladite parallele FI, l'autre F au bout de la ligne AF, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne IF le long de FK, l'autre celuy qui luy fait décrire la circonférence FCG; ou pour mieux dire, puiſque la direction de ce mouvement circulaire eſt FR, je ſuis aſſeûré que pendant que le premier point aura décrit FK, le ſecond eſtant porté par la ligne AF que nous imaginons ſe mouvoir parallelement à ſoy-meſme, & partir du point F (comme nous avons pû faire cy-devant comme en la Spirale &c.) puiſque la direction du mouvement circulaire eſt FR, que ce point, dis-je, aura décrit dans FR prolongée une ligne FR égale à la circonférence FCG.

Mais dautant que ces deux mouvemens ne ſont pas les ſeuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallele & égale à FK, pour avoir à ſon autre bout un point de la touchante, mais j'examine plûtoſt tous les mouvemens du point F qui décrit la Quadratrice en cette ſorte.

Je remarque donc premiérement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne FR égale à la circonférence FCG en autant de temps que la ligne FI ſe mouvant parallelement à ſoy-meſme & uniformement en emploira juſqu'à ce qu'elle ait la poſition de la ligne ABG.

Secondement. Faiſant donc mouvoir la ligne AF parallelement & uniformement (puiſque FR eſt la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) ſans conſidérer le mouvement de la ligne IF, & partant conſidérant ladite ligne immobile, il eſt certain que, ſi nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui eſt que le point F doit toûjours eſtre en la commune ſection des lignes AF, FI,

G quand

quand l'extrémité immobile de la ligne AF sera en R, le point mobile F se doit rencontrer là ou AF prolongée tant qu'il sera nécessaire, coupe la ligne FI; tirez donc par R la ligne RIM parallele à AF & coupant FI en I & le diamétre EBM prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisiémement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considérer que la ligne FI emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré IL parallele à FK, & coupant ABG prolongée en L) lors que la ligne IF sera une mesme avec la ligne ABG, c'est à sçavoir lors que son extrémité immobile F aura décrit la ligne FK, & son point immobile I, la ligne IL. Il est donc certain que si aux mouvemens précédens l'on ajoûte celuy du point mobile F ou I le long de IL, sans considérer que ce point mobile doit toûjours estre dans la commune section des lignes AF, IF, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considérer que ce point F a toûjours deû estre la commune section des lignes AF, FI, & qu'ayant fait mouvoir AF jusqu'à ce que son extrémité immobile ait décrit FR, on luy a donné la position RI, à laquelle elle s'arreste, posé que IF ne doive se mouvoir que sur FK, & que par cette condition le point estant porté de I vers L, doit décrire la ligne IM au lieu de IL & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point estant éxaminez, l'on trouve que pendant que AF s'est promenée le long de FR, & IF le long de FK, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne MF, vous aurez la touchante de la Quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme cy-dessus la ligne FR égale à la circonférence FCG & les lignes FI, RIM, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la Quadratrice, sçavoir celuy qu'il a en F, nous le considérons par nostre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précédentes,

tes, mesme en la Spirale le long de la touchante FR, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore estre porté vers la ligne AB, à cause du mouvement de la ligne FI, & outre ces deux mouvemens il doit toûjours estre la commune section des lignes AF, FI, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il sera donc dans leur commune section lors que AF sera en RIM, & IF en ABM, & partant il sera en M. Voicy en deux mots une régle générale pour la Quadrat.

Un point F de la Quadratrice estant donné, & le demi-cercle BDE, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale AF, vous décrivez une circonférence FCG depuis F jusques en un point G du diamétre AB, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice, vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonférence vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne FR égale à ladite portion de circonférence (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans AB prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle BD) la commune section du diamétre AB prolongé vers B, & d'une ligne RM tirée par R parallele à AF, sera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archiméde au livre des Hélices.

Si quadratricem linea recta contingat, producaturque donec occurrat semi-diametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis productâ, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei quæ à centro circuli quadratricis ad punctum contactûs in quadratrice ducitur; à puncto verò contactûs in quadratrice circumferentiæ circuli circulo quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis quadratricis donec eidem semidiametro etiam productæ occurrat, eique circumferentiæ portioni tangens ducatur ad punctum quod est communis sectio ipsius & quadratricis, occurret ejusmodi tangens circuli ei quæ à communi sectione tangentis Quadratricis

& diametri productæ ducta fuerat parallela, eritque lineæ circulum tangentis portio inter punctum (quod est communis sectio ipsius & productæ parallelæ) & quadratricem intercepta æqualis prædictæ portioni circunferentiæ circuli.

Nota, l'on peut rendre la régle plus générale, faisant comme la circonférence FCG est à FK; ainsi une ligne prise dans FR, mesme prolongée, plus grande où plus petite que FR, soit à une ligne plus grande ou plus petite que FK prise dans FK, mesme prolongée; mais ne la prenant pas égale, la construction en est plus difficile.

Remarquez deux ou trois choses avant de passer outre. La premiére, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la seconde partie de la quatriéme proposition de ce traité en cette façon.

La vitesse du mouvement de la ligne IF, & partant de son extrémité mobile F estant donnée dans FK, elle sera aussi donnée dans FA; & parce que le point mobile F doit estre la commune section des deux IF, FA, la ligne IF ayant la position KAB coupera FA, c'est-à-dire en A; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à FK, l'autre en montant égal à KA, & ces deux se réduisent à un seul FA: pareillement la vitesse de la ligne AF estant donnée dans FR: son point mobile F devant estre la commune section de AF & FI se trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens FR, RI, qui se réduisent à un seul FI, qui est le troisiéme costé du triangle FRI.

Ces quatre mouvemens (car nous avons divisé en deux parties celuy qui fait que le point mobile F doit estre la commune section des deux lignes AF, IF) estant réduits aux deux IF, FA achevez-en le parallelogramme IFAM, la diagonale FM sera la direction du mouvement meslé de ces deux.

Cecy avoit déja esté expliqué plus briévement, mais il y a plaisir de considérer une chose par divers biais & en différentes façons. La

La seconde; si l'on demandoit la touchante de la quadratrice au point D, où la ligne AD est d'abord perpendiculaire à DC, que puisque le mouvement de AD est donné dans DC, ou bien AB, & celuy DC est donné aussi d'abord dans DA, & la raison de ces deux mouvemens est comme de la ligne DA au quart de cercle DB, il ne faut que prendre dans AB prolongée autant qu'il le faut une ligne AE, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante ED. Pl. VI. Fig. 3.

L'on eust pû faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le discours est tout le mesme voulant tirer la touchante au dessus de D entre D & H, que lors qu'on la tire en un point plus éloigné de H & au dessous de D, comme au premier exemple.

La troisiéme, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadratariæ*, & le point D *principium*; mais il ne considére que la portion DH, qui luy sert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arreste à la façon de décrire la quadratrice, & il est manifeste que le point D se trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice DH à l'ordinaire, le point H se trouve aprés les autres qui sont entre D & H: mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que considérant la Quadratrice prolongée des deux costez, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre costé également éloigné de H, & que le point H est le seul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appellé le sommet de la Quadratrice.

Dixiéme exemple de la Cissoïde.

Soit proposé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, suivant qu'on veut décrire la Cissoïde, avec ses deux diamétres à angles droits AC, BD: du point D prenez de part & d'autre des points également distans D 1 & D 1 sur les quarts de cercle DA, DC, puis D 2, D 2, puis D 3, D 3 &c. tirez par les points Pl. VI. Fig. 4.

1, 2, 3, 4, &c. du quart de cercle DC des lignes paralléles au diamétre BD, puis du point C joignant les lignes C1, C2, C3, C4, &c. aux points 1, 2, 3, 4, &c. du quart de cercle DA, là où C1 coupera la paralléle 1, 1, & C2 la parallele 2, 2, & C3 la parallele 3, 3, & C4 la paralléle 4, 4, vous aurez des points par lesquels la Cissoïde est décrite.

Que si vous voulez prolonger la Cissoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes paralleles au diamétre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du costé de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes occultes C1, C2, C3, C4, & prolongez-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera sa réciproque, sçavoir C1, la parallele 1, 1; C2 la parallele 2, 2 &c. ces points seront dans la Cissoïde prolongée.

Par un discours semblable à celuy dont nous nous sommes servis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut estre prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallele au diamétre BD, ou si vous aimez mieux la touchante du cercle de la Cissoïde au point A.

Et parce que la Cissoïde peut estre continuée de l'autre costé par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit sur son diamétre AC prolongé vers C, en sorte que ces deux cercles se touchent en C, il nous sera permis d'appeller le point C, le sommet de la Cissoïde, puisque c'est l'unique dans la Cissoïde, qui n'en a point de réciproque, ou si vous voulez de semblable : car les points de la Cissoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent estre appellez réciproques des points de la portion DC de la Cissoïde. Ce qui est assez clair par la méthode de trouver ces points.

Cecy posé, il faut éxaminer les mouvemens particuliers du point qui décrit la Cissoïde, pour en donner les touchantes.

Il faut donc remarquer d'abord, que si vous faites tourner la ligne

gne CD circulairement autour du point C, en sorte qu'elle passe successivement par C1, C2, C3 &c. de D vers A, prenant les points 1, 2, 3, 4, dans le quart de cercle DA, & qu'en mesme temps le diamétre BD soit porté parallelement à soy-mesme vers C, mais en montant de telle façon que son extrémité D décrive le quart de cercle DC d'un mouvement égal & uniforme, & que lors que la ligne CD aura la position CA, le diamétre BD ait la position de la touchante du cercle en C, c'est-à-dire de l'axe de la Cissoïde, le point qui aura toûjours esté dans la commune section de ces deux lignes aura décrit la portion DC de la Cissoïde. Cecy posé.

Soit proposé le point F de la Cissoïde lequel soit pris dans la figure 1. entre les points C & D; mais dans la 2. il sera plus éloigné du sommet, & au dessous de D à l'égard de C, tirez la ligne FG parallele au diamétre BD, coupant le cercle en G en sa partie inférieure dans le quart de cercle DC en cette premiére figure, & prolongez-la du costé de F vers H, puis tirez la ligne CF, & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne CFI en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence IA jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position CA, dans ce mesme temps la ligne FG s'estant meuë, comme nous avons expliqué, parallelement à soy-mesme vers C, en sorte que son point G ait décrit la circonférence GC du cercle de la Cissoïde, sera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C. Pl. VII. Fig. 1. 2.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne CF vers A, si vous décrivez du centre C & de l'intervale CF un arc de cercle FK compris entre CF & CA & coupant CA en K, il se trouve que le point F de la ligne CF porté par le seul mouvement de la ligne CF, ce point, dis-je, a décrit l'arc FK, il a donc

donc décrit l'arc FK en mesme temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne FG, a décrit la circonférence GC, mais chaque point de la ligne FG décrit une ligne égale & semblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne FG porté par cette ligne décrit une circonférence égale à GC: vous voyez donc que ne considerant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes CF, FG, luy donnent sans considérer que ce point doit toûjours estre en leur commune section, par le mouvement de la ligne CF il aura décrit la circonférence FK en mesme temps que la ligne FG luy aura fait décrire une circonférence égale & parallele à GC, & partant que ces deux mouvemens sont proportionnez, comme les circonférences FK & GC, mais les directions de ces deux mouvemens sont l'une FL touchante de l'arc FK, & perpendiculaire à CF; l'autre est FN parallele à GM, qui touche le cercle de la Cissoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit est parallele à celle que décrit le point G, & puisque les points GF sont dans la mesme ligne droite, les touchantes sont paralleles) & partant si vous faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, ou comme le demi-diamétre CF de l'arc FK, au diamétre entier CA de l'arc GC, ainsi FL soit à FN, vous aurez les raisons de ces mouvemens dans leurs lignes de direction : cecy posé vous ne composez pas un mouvement des deux seuls FL, FN, car vous vous souvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore estre toûjours la commune section des lignes CF, FGH. Voicy cette construction d'une autre façon.

Estant donné le cercle de la Cissoïde ABCD, son centre E, la Cissoïde CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallele au diamétre BD, coupant le demi-cercle ADC en G; prolongez-la vers le costé du diamétre AC, comme en H; du sommet C de la Cissoïde tirez la ligne CFI en la premiére figure ou CIF en la seconde coupant le demi-cercle

cle ADC en I; du centre C & de l'intervale CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamétre CA coupant ledit diamétre mesme prolongé vers A s'il en est besoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamétre AC, du point G tirez aussi GM touchante du cercle de la Cissoïde, & par le point F menez FN parallele à GM, & prolongez-la vers le costé de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, c'est-à-dire comme la ligne CF est à CA, ainsi FL dans la premiére touchante, & prise si vous voulez *ad libitum*, soit à FN; par L tirez LHP parallele à FC, & prolongez-là vers le costé de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallele au diamétre BD, & prolongez-là jusqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce sera la touchante de la Cissoïde.

Dans cette construction nous ne faisons point mention des points H & O, ni du parallelogramme HFOP, quoy-qu'il eust esté besoin d'en parler auparavant pour éxaminer tous les mouvemens du point F de la Cissoïde: l'on eust pû faire le mesme dans la quadratrice, où la seule intersection des lignes RIM & ABM, nous eust donné le point M, sans considérer le parallelogramme IFAM &c. PL. VI. Fig. 2.

L'on pourroit ajoûter des démonstrations Géométriques à ces constructions, pour prouver tous ces points de rencontre, mais cela seroit un peu long.

L'on peut encore considérer ces mouvemens de tous les biais que nous les avons considérez dans la quadratrice, & énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallele à CF coupant FL en L, & PN parallele à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile. PL. VII. Fig. 1. 2.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, voicy la figure sur laquelle je remarque: PL. IX. Fig. 1.

Premiérement, que faisant trois cas pour les touchantes de cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisiéme pour les points audessous de D (car la touchante au point C est le diamétre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cét axe;) l'on auroit pû mettre celuy-cy le premier, n'eust esté qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F: or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un mesme, le point H peut estre le mesme que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou $\mu\nu$ sont un mesme point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'enfuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamétre EC est au demi-diamétre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au double de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK: prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA, l'on aura fait cette construction Géométrique, & la parallele à CF passera de L par le centre E; ou encore prenez d'un costé la toute DA, & de l'autre Gμ double de DM, la parallele à CF sera AB &c.

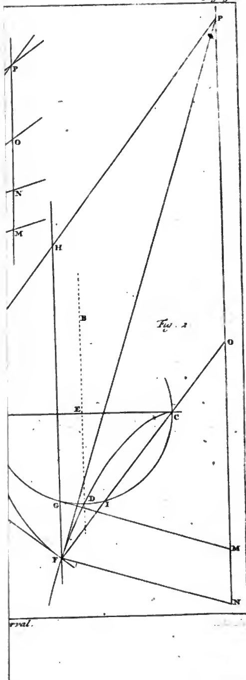
Onziéme exemple. de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

Pl. IX. Fig. 2. Soit proposé le cercle duquel le centre est a, le demi-diamétre aB, & sa touchante BC au point B prolongée en C, l'on imagine

Fig. 4.

Fig. 2

Roberval.


P
P
O
N
M
H
B
Fig. 2
O
E
C
D
G
I
M
F
N
rval.

imagine que le cercle *a*B faiſant une révolution ſur la ligne BC, ſoit que BC ſoit égale à la circonférence du cercle, ſoit qu'elle ſoit plus grande ou plus petite (ce que je ſuppoſe indifférent, & facile à démontrer) le point B de ce cercle eſtant porté par les deux mouvemens, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cauſe de la révolution du cercle; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde; ou ſi vous voulez, ayant tiré par le centre *a* la ligne *ad* égale & parallele à BC vers le meſme coſté, l'on imagine que le cercle gliſſant de B vers C ſans tourner à l'entour de ſon axe, en ſorte que le centre *a* décrive la ligne *ad* par un mouvement uniforme, en meſme temps le point B décrive la circonférence de ſon cercle paſſant de B par π QGB d'un mouvement uniforme, & que le centre *a* eſtant arrivé en *d*, ce point ſe retrouve en C, où la ligne BC touche le cercle, & qu'enfin ces deux mouvemens, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de ſon cercle, l'autre droit, par lequel il eſt emporté vers C, meſlez comme nous avons dit, eſtant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens eſtant uniformes, le point B peut décrire trois diverſes ſortes de Roulettes, ſuivant que ſon mouvement circulaire ſera proportionné à ſon mouvement droit, ou ſi vous voulez ſuivant la raiſon de la circonférence de ſon cercle à la ligne *ad*, que le centre décrit, puiſque cette circonférence peut eſtre ou égale à la ligne *ad*, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arreſtons pas à conſidérer les lignes qui peuvent eſtre décrites, poſé que l'un ou l'autre de ces mouvemens, ou meſme poſé que ni l'un ni l'autre ne fuſt uniforme.

Cecy poſé, pour décrire aiſément cette ligne, ſoit prolongée la ligne BC, comme en E; du point E ſoit tiré EF égale & parallele à *a*B; du centre F décrivez le cercle EGHIKLMN, qui ſera égal au premier, diviſez ſa circonférence en tant de par-

ties égales que vous voudrez par les points G H I K L M N, & tirez par ces points les demi-diamétres du cercle. Divisez la ligne *ad* en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence G H I &c. aux points *o* P *q* R S *t u*, par le point *o* tirez *ox* égale & parallele au rayon F G, par P tirez P*y* égale & parallele à F H, puis *qz* égale & parallele à F I, & ainsi des autres, vous aurez les points B *x y z* θ ξ ψ C, par lesquels la Roulette doit estre décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *ad* un des points de sa division comme par éxemple le premier *o*, & tirez *o*ω perpendiculaire sur B C, & par conséquent parallele aux rayons *a* B, F E; mais par la description *ox* est parallele à F G, & partant l'angle *xo*ω est égale à l'angle G F E, & décrivant du centre *o* & de l'intervale *ox*, l'arc *x*ω, cét arc est égal à l'arc G E: mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *ao*, & soit en *o*, le point B doit avoir décrit un arc égal à E G; car par l'hypothese E G est à sa circonférence totale, comme *ao* est à *ad*, & les mouvemens sont uniformes; donc le point B a décrit l'arc ω*x*, il est donc en *x*, & par conséquent le point *x* est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la mesme chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle G H I K L M N d'un autre centre pris dans la ligne *ad*, comme du centre *o*, P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mesmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de directions deux lignes qui soient entre elles comme la ligne B C ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes estant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante. Car

Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne ADC; du point E tirez la ligne EF parallele à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E estant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette. Pl. VIII. Fig. 1.

Mr. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme cydessus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallele à FB, la ligne EH sera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'est pas si générale n'estant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Il faut demontrer qu'ayant tiré comme cy-dessus la ligne EF & FG touchante du cercle au point F, & ayant pris FH dans FG égale à EF; si l'on tire deux lignes l'une HE, l'autre FB, elles seront paralleles.

Pour le prouver, tirez IK parellele à FH jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne FBK prolongée vers B; prolongez encore la ligne EFIL jusqu'à l'autre costé du cercle en L, & tirez la ligne BL, & supposons que les lignes FB, EH sont paralleles; donc l'angle EHF est égal à l'angle FKI: mais par la construction l'angle HEF est égal à l'angle EHF, parce que nous avons pris FH égale à EF; il faut donc montrer que l'an-

gle KFI eſt égal à l'angle FKI: mais l'angle FKI eſt égal à GFK par la conſtruction, ayant tiré IK parallele à FG, il faut donc prouver que l'angle KFI eſt égal à l'angle GFK, mais GFK eſt égal à l'angle BLF, dans la ſection alterne; il faut donc prouver que KFI eſt égal à BLF; ce qui eſt certain.

En retournant, l'angle KFI eſt égal à BLF, mais BLF dans la ſection alterne eſt égal à l'angle GFK, donc KFI eſt égal à l'angle GFK: mais à cauſe des paralleles FG, IK, l'angle GFK eſt égal à FKI, donc KFI & FKI ſont égaux, & le triangle FIK eſt iſoſcele; mais le triangle EFH eſt auſſi iſoſcele par la conſtruction le triangle EFH eſt donc ſemblable à FIK, & l'angle HEF eſt égal à l'angle KFI, d'où il s'enſuit que la ligne EH eſt parallele à FBK; ce qu'il falloit démontrer.

Ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de ſon axe, & tiré la touchante FH, ç'a eſté toute la meſme choſe, comme ſi ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la poſition qu'il doit eſtre lors que le point A du cercle eſt arrivé en E, nous luy euſſions tiré ſa touchante par le point E, car ces poſitions de cercles eſtant paralleles, & le point E eſtant auſſi élevé ſur la baſe AC, que le point F, les touchantes des cercles ſont paralleles, & partant l'une peut ſervir auſſi-bien que l'autre, pour en meſler un mouvement droit, puiſque l'une & l'autre rencontre la ligne EF, qui eſt la direction de ce mouvement droit. C'eſt pourquoy ſi l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la poſition qu'il eſt lors que le point qui la décrit eſt arrivé en E, ayant premiérement décrit le cercle BFD autour de l'axe BD, & tiré la ligne EFI parallele à ADC, prenez EM dans EFI égale à FI, qui eſt compriſe entre la circonférence & le diamétre du cercle qui eſt perpendiculaire à la baſe AC, vous aurez le point M par où doit paſſer ce diamétre perpendiculaire. Et partant ſi vous tirez MN perpendiculaire à AC, & ſi vous la prolongez vers M en O en ſorte que NMO ſoit

ſoit égale au diamétre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamétre dudit cercle en la poſition requiſe; ce qui eſt facile.

Je ne vous diray rien des propriétez de la Roulette, comme que la ligne droite EF eſt à l'arc FB, en meſme raiſon que la baſe AC à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où aprés en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les ſemblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs eſpaces &c. ce qu'il a expliqué dans un ſi bel ordre, qu'il m'a dit que ſon Traité eſtoit auſſi limé comme s'il euſt eſté ſur le point de le faire imprimer.

Douziéme éxemple, de la compagne de la Roulette.

C'EST ainſi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hipotheſe & la deſcription en cette ſorte.

Soit propoſé la Roulette ABC de laquelle la baſe eſt AC l'axe BD, le centre du cercle dans l'axe eſt E, & le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette eſt décrite par la ſeconde façon qui en a eſté donnée dans l'éxemple précédent; c'eſt à ſçavoir que pendant que le cercle de la Roulette gliſſe depuis A juſques en C, en ſorte que ſon centre E décrit d'un mouvemement uniforme une ligne parallele & égale à AC, en meſme temps le point mobile A parcourt par un mouvement uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement compoſé de ces deux; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainſi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamétre du cercle, qui eſt toûjours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamétre de D vers B d'un mouvement inégal, en ſorte qu'il ſoit toûjours également éleve ſur la baſe AC, comme eſt le point qui décrit la Rou- Pl. VIII. Fig. 2.

Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lors que le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.

De mesme tirant par un autre point K la parallele à la base KLM, qui coupe la circonférence BLHD en L & le diamétre BD en M, lors que le point de la Roulette est en K, c'est-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette est dans BD en tel endroit que M, & ainsi des autres.

D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes paralleles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la mesme ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle & son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la mesme ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de mesme prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la mesme ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF, dans la mesme ligne PF vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-cy, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux cy-aprés. Or ç'a esté la mesme chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de luy donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déja esté remarqué dans la Roulette.

Cecy posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-cy est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre

l'autre inégal, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs paralleles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-cy monte de la mesme façon que celuy qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallele à AD & l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallele à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallele à AC du point de cette ligne-cy qui est réciproque à celuy du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

Par exemple, soit la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle & le reste, comme il a esté dit: pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L, réciproque du point O, la touchante du cercle LR, & je compose le mouvement LR de deux RS, SL, dont l'un RS est parallele à BD; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallele & égale à RS, ce sera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis aprés parce que le point O a dans une ligne parallele à AC un mouvement égal à celuy du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celuy du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallele à AC, & égale à LR, j'auray les directions & la raison des deux mouvemens

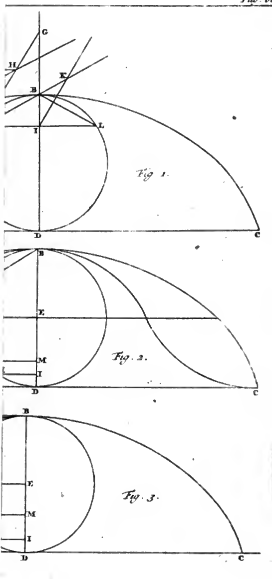
Pl. VIII. Fig. 3.

vemens du point O, & partant la ligne OV sera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

Treiziéme exemple, de la Parabole de M. des Cartes.

Pl. IX. Fig. 3. MONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui est une espece de Parabole: la premiére par sa régle composée qui est en la 318. page de sa Méthode, & la deuxiéme en la page 405. de la mesme méthode, ou bien 357. qui est en faisant mouvoir une Parabole ordinaire avec son plan le long de son diamétre MC, & prenant un point fixe comme G hors le mesme diamétre, mais dans un autre plan fixe sur lequel le plan de la Parabole se meuve en coulant, ces deux plans convenans toûjours l'un à l'autre pendant le mouvement de celuy de la Parabole: puis dans le diamétre BC soit marqué un point B, qui ne se puisse mouvoir qu'au mouvement de la Parabole, demeurant toûjours à pareille distance du sommet; & soit entendu une ligne droite GB indéfinie, qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre, & qui passe toûjours par B pendant que la Parabole se meut, cette ligne GB coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points, la ligne courbe qui passera par tous ces points sera la Parabole de M. des Cartes, laquelle à proprement parler est une Conchoïde de Parabole, & peut-estre double, car la ligne GB peut couper la Parabole proposée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe, par éxemple en A, tirons premiérement deux lignes paralleles au diamétre de la Parabole TSV, que nous faisons mouvoir sur la ligne droite MC, desquelles paralleles l'une DGZ passe au point G, qui est comme le Pole, & l'autre parallele EAX passe au point A auquel nous voulons la touchante; en suite éxaminons premiérement le mouvement du mobile au point B, ledit mobile estant porté sur la ligne GBF, laquelle se meut circulairement sur le point.



Roberval.

point fixe G en tirant vers les points DC, duquel mobile au point B nous avons la direction, à sçavoir BC, parce que par la description de la ligne courbe QRA, ledit mobile se maintient toûjours dans la ligne MC: nous avons aussi les deux autres directions desquelles est composée BC, l'une la circulaire DB, la ligne DB estant perpendiculaire sur GB, & l'autre direction la ligne droite BF, nous aurons donc ces directions, & les raisons des vitesses dudit mobile au point B: or les points qui sont dans la Parabole mobile montant tous également, si nous menons du point C une parallele à BG, sçavoir CD, les lignes DG, EA & BC seront égales, & par conséquent EA & DG seront les mesmes directions que BC; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoir la touchante; & considérons le point B comme estant fixe & arresté, autour duquel se meuve circulairement la mesme ligne BG vers VMT, car c'est le mesme mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles DGB & GBM estant égaux, en mesme temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M, & A en N, les lignes GM & AN estant paralleles à BD; donc la direction circulaire du point A sera AN: mais le mesme point A se maintenant toûjours dans la Parabole TSV, sa direction sera la touchante de la mesme Parabole TSV. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir IL, & achevé le parallelogramme AHIN, nous avons donc AI pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole STV, nous avons aussi la direction du mesme point A se maintenant dans MG, à sçavoir AE égale à BC, & par conséquent le parallelogramme EOIA estant achevé, la ligne droite OA diagonale du parallelogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe QGRA audit point A; ce qu'il falloit faire.

PROJET

D'UN LIVRE DE MECHANIQUE
traitant des Mouvemens composez.

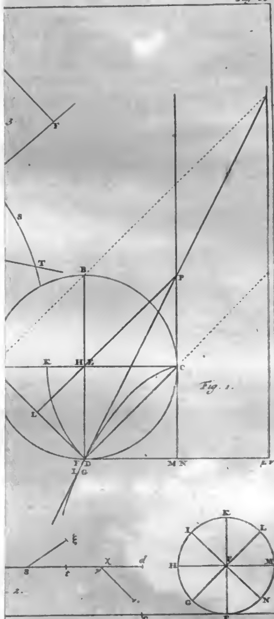
PAR un mouvement composé j'entens celuy qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens différens entre eux, soit par leurs directions ou leurs vîtesses, ou par toutes les deux, lors que tous ces mouvemens sont communiquez à un mesme mobile, ou en mesme temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états différens; sçavoir, ou dans ses causes, ou en soy-mesme pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mesmes.

Icy on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps differens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légereté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu prés, soit que ces causes, quoy-qu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les éxemples des feux artificiels par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'air. On y ajoûtera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles: on y fera entrer l'artifice des hommes, qui par leurs propres forces, & par celles tant des animaux que des autres corps naturels, peuvent faire des mouvemens composez, d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possede les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux, vegetaux, mineraux &c. Quoy-


3
T
S
T
B
P
K
H E
C
Fig. 1.
L
F D
M N
L G
K
I
L
H
M
G
N
E
s
t
d
2.
C
Roberval.

Quoy-qu'on connoiſſe les mouvemens ſimples qui en ſont un composé, il n'eſt pas toûjours facile de connoiſtre ce composé, ni les lignes qu'il décrit par ſa compoſition, particuliérement quand elles ſont courbes, comme il arrive d'ordinaire. Delà vient cette ſcience ſpéculative qui tient beaucoup de la Géometrie, & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens compoſez; de leurs tangentes & de leurs autres proprietez.

Le mouvement composé conſidéré en ſoy n'eſt point différent d'un mouvement ſimple; & on le peut conſidérer comme ſimple, quand il eſt connu, de meſme que s'il eſtoit produit dans la nature par ſa ſimplicité; meſme on peut conſidérer non-ſeulement un mouvement composé, mais auſſi un mouvement ſimple droit ou courbe, comme eſtant composé de pluſieurs autres tant ſimples que compoſez; ce qui ſert ſouvent pour la découverte de pluſieurs belles véritez touchant la nature & les propriétez des lignes & des figures, qu'on ne découvriroit pas ſi facilement ſans cette conſidération, quoy-que ſouvent elle ne ſoit qu'une fiction, mais pourtant une fiction d'une choſe poſſible.

Il eſt remarquable que quand un mouvement composé ſe préſenteroit à nous, ſi nous ne ſçavons point qui ſont ceux qui l'ont compoſe, quand meſme nous ſçaurions qu'il n'eſt pas ſimple, nous ne ſçaurions pourtant découvrir avec certitude qui ſont les compoſans. La principale raiſon de ce defaut vient de ce que tout mouvement peut eſtre composé de pluſieurs ſortes, & meſme d'une infinité de ſortes, entre leſquelles il ſeroit difficile, pour ne pas dire impoſſible, de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé, ils ne ſont remarquables qu'au meſme temps qu'il ſe compoſe; car aprés qu'il eſt composé, ſes effets ne ſont plus différens de ceux d'un mouvement ſimple.

En général ces effets ſont de changer de viteſſe, ou de direction, ou de toutes les deux, ſans compter que de deux ou de pluſieurs mouvemens actuels il ſe peut compoſer un repos.

I 3 Mais

Mais en particulier, ou ils font des lignes différentes, ou des figures différentes, ou ils changent des temps égaux en des inégaux, ou au contraire, & partant quelquefois ils réglent, quelquefois ils déréglent; ils établissent, ils détruisent, & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter icy pour éxemple quelques-uns de ces effets particuliers, pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carosses courant viste, & voulant tourner trop court, versent. Il en est de mesme de ceux qui sautent hors d'un carosse qui court.

De l'effet des lances, qui rompent, qui faussent, ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet, de pistolet &c. sur des corps mobiles, tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins, ou qui écrasent la bale; du coup oblique qui est une espéce de mouvement composé, mesme sur un corps immobile. On citera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau, & on éxaminera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges se déreglent dans le transport, & les pendules y sont des plus sujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en piéces au sortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terrestres font des compositions de mouvemens surprenans & souvent dangereux tant sur la terre que sur la mer.

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM

AUCTORE

ÆGIDIO PERSONERIO DE ROBERVAL.

DE

RECOGNITIONE

ÆQUATIONUM.



QUATIONEM recognoscere, est statum illius examinare, eo fine ut innotescat ejus constitutio hinc ab origine ejusdem, usque ad ultimam ordinationem: atque ut nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quæruntur habitudo; item ut dignosci possit, an de unico latere ignoto explicabilis sit ipsa æquatio, an vero de pluribus, & quot; atque utrum aliqua ex ipsis sint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rursus sintne latera quæsita positiva, seu realia, seu etiam possibilia: an contra, ficta, seu nulla, seu etiam impossibilia. Quæ omnia ut melius itelligi possint, præmittenda sunt quædam, tum circa vocabullorum ac notarum, seu signorum, explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere sequi decrevimus.

Ac primum, quod ad vocabula, notas, seu signa spectat, sive de lateribus sit quæstio, sive de potentiis eorumdem laterum, quædam agnoscimus quæ suâ naturâ aliquid indicant supra nihilum; quædam verò quæ suâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa positiva; priora quidem positiva supra, posteriora autem positiva infra.

Rursùs tam positiva supra, quam positiva infra, vel affirmativa sunt, vel negativa; sed affirmativa supra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, signum affirmationis tam supra quàm infra, est hoc vulgò receptum +. Signum negationis tam supra quàm infra, est hoc aliud vulgò quoque receptum —. Signum differentiæ inter duas magnitudines, est ejusmodi = ; quo ambiguum relinquitur quænam ex duabus magnitudinibus propositis, inter

quas tale ſignum intercedit, major eſt aut minor. Signum æqualitatis tale eſt ∞; quo ſignificatur magnitudines, inter quas illud intercedit, eſſe æquales; ſive una magnitudo uni magnitudini æquetur; ſive una pluribus; ſive plures uni; ſive denique plures pluribus.

Operæpretium fuiſſet ſi quæ ſuâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo ſigno ab aliis diſtincto notatæ eſſent: verùm quia paſſim, immò ferè ſemper accidit ut in eadem quæſtione, ſub iiſdem terminis, magnitudines quæſitæ ſint ſupra, vel infra, ex natura ipſius quæſtionis, ac vi æquationis ad ipſam pertinentis; ideò talis diſtinctio commodè fieri non potuit; fiet tamen, ut notâ ejuſmodi æquationis conſtitutione, innoteſcat etiam natura ipſorum laterum, & quicquid ad numerum eorumdum determinandum requiritur, ut magis patebit in ſequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilo æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (ſeu illud multiplicatum nihilo æquivaleat, ſeu aliquid ſupra, aut infra indicet) producit aliquid nihilo æquivalens. Idem accidit, ſive multiplicator nihilo æquivaleat, ſive aliquid indicet ſupra aut infra, dum-modo multiplicatum æquivaleat nihilo.

Idem prorſus intelligendum de diviſione, quod de multiplicatione; diviſor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & diviſum producti; quandoquidem multiplicatio reſtituit diviſionem, & diviſio multiplicationem. Hæc de notis ſeu ſignis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari poteſt æquatio, præcipuè ſi multipliciter affecta ſit; & revera à diverſis authoribus diverſimodè conſtitutus eſt ordo ipſe, nobis accommodatiſſimus ille videtur qui omnia quibus æquatio conſtat homogenea ex una parte conſtituit; ſic ut omnia ſimul nihilo æquivalcant, quod quidem nullo negotio ſemper efficitur; illud autem vel unico exemplo planum fiet. Proponatur methodo Vietæ hæc æquatio $A^3 - BA^2 + C^2A \infty Z^s$, manifeſtum eſt per anthiteſim oriri hanc æquationem $Z^s - C^2A + BA^2 - A^3 \infty 0$. vel hanc

A^3

$A^3 - BA^2 + C^2 A - Z^{sol.} \infty o.$ Etſi vero utraque formula noſtro inſtituto accommodari poſſit, priorem tamen eligimus, eam ſcilicet in qua magnitudo omninò data $Z^{sol.}$ afficitur ſemper affirmatè, ac ſecundum eam intelligi debent quæcumque poſtea dicturi ſumus.

De conſtitutione æquationum quadraticarum.

CAPUT UNICUM.

Propoſitio prima.

Si $Z^p - RA + A^2 \infty o.$

Sunt duo latera, ambo ſupra, quorum ſumma eſt R; rectangulum vero ſub ipſis eſt Z^p, & ſit A alterutrum ex iſtis.

Intelligatur enim $A - B \infty o.$ ſic ut $+A$ æquetur ipſi $+B$, vel $A - C \infty o.$ ſic ut $+A$ æquetur iſti $+C$; unde ſi ducatur $A - B$ in $A - C$ quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud eſt $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix} + A^2$, proinde hoc æquatur nihilo, quod ſemper accidet. Sive enim A æquetur ipſi B ita ut $A - B \infty o$, quicquid valeat $A - C$, ſi $A - B$ ducatur in $A - C$, hoc eſt ſi nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum; ſive A æquetur ipſi C, ita ut $A - C \infty o$, quicquid valeat $A - B$, ſi $A - C$ ducatur in $A - B$, hoc eſt ſi nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum.

Jam BC vocetur ex hipotheſi Z^p; & $B + C$ vocetur R, fietque id quod proponitur nempe $Z^p - RA + A^2 \infty o$ qua in æquatione A poteſt explicari tam de ipſo B quam de ipſo C à quibus producitur BC ſive Z_p.

Pro determinatione.

DETERMINATIO alicujus æquationis eſt conſtitutio illa in qua vel omnia, vel quædam ex lateribus de quibus explicabilis eſt æquatio inter ſe æqualia ſunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari poteſt æquatio, quales ſunt quadraticæ, unica tantum poteſt eſſe determinatio, cum ſcilicet duo latera ſunt æqualia. Cum autem de tribus lateribus æquatio explicabilis eſt, quales ſunt cubicæ; tunc duplex eſſe poteſt determinatio, altera quidem major, cum omnia tria latera æqualia ſunt, altera vero minor, cum duo tantum æqualia ſunt. Atque ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id eſt quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius determinationes.

Jam in propoſita æquatione unica eſſe poteſt determinatio in qua duo latera de quibus A eſt explicabile erunt æqualia; cum ſcilicet Z^p æquatur $\frac{1}{4} R^2$: tunc enim unumquodque ex ipſis lateribus A æquale eſt $\frac{1}{2}$ ipſius R.

Nam in prædicta formula $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix} + A^2 \infty 0$. in caſu determinationis B intelligitur æquari ipſi C; unde illa æquatio æquivalet huic $B^2 - 2BA + A^2 \infty 0$, ſive etiam huic per interpretationem $Z^p - RA + A^2 \infty 0$. ut proponitur, ubi quoniam $R \infty 2B$ manifeſtum eſt Z^p eſſe quadratum ipſius B, ſive dimidii ipſius R, ſive etiam Z^p eſſe quartam partem quadrati ipſius R, & A quod æquatur ipſi B vel C, eſſe dimidium ipſius R.

Propoſitio ſecunda.

SI $Z^p + RA - A^2 \infty 0$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus, eſt ſupra, alterum minus eſt infra, differentia amborum eſt R, & rectangulum ſub ipſis Z^p, & ſit A alterutrum ex ipſis, (intelli-

telligatur enim $B - A \infty 0$. ſic ut A, dum erit ſupra, æquetur ipſi B; vel $C + A \infty 0$. ſic ut A, dum erit infra, æquetur ipſi C. Atque ex hypotheſi ſit B majus quàm C.) Si igitur $B - A$ ducatur in $C + A$, quod inde orietur æquabitur nihilo.

Productum autem, id eſt $BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2$, æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis eſt de A ſupra, æquali ipſi B. Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut $BC \infty Zp$ & $B - C \infty R$. Quod ſi quis ſingulas æquationis partes conferre velit, ut noſcat qua ratione ipſæ ſe invicem tollant, is reperiet $+ BC$ & $- CA$ ſeſe tollere, item $+ BA$ & $- A^2$ ſe tollere quoque. Unde fit ut omnia homogenea ſimul nihilo æquivaleant.

Jam ſi C intelligatur æquari ipſi A atque $+ C + A$ multiplicetur per $+ B - A$, productum erit rurſus $BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2$, quæ æquatio eſt eadem quæ ſupra, unde illa explicabilis quoque eſt de A dum ipſum æquatur ipſi C, ita tamen ut ipſum ſit infra, ut indicat $C + A \infty 0$, vide notas poſt æquationes cubicas. Hìc autem $+ BC + BA$ ſe invicem tollunt ſicuti $- CA - A^2$; ut rurſus omnia nihilo æquentur; atque æquatio eandem quam ſupra accipere debet interpretationem.

Propoſitio tertia.

Si $Zp - RA - A^2 \infty 0$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus eſt ſupra, alterum majus eſt infra, differentia amborum R, & rectangulum ſub lateribus ipſis Zp: A autem explicabile eſt de alterutro ex iiſdem.

Intelligatur enim ut ſupra $B - A \infty 0$. item $C + A \infty 0$. & B minus ſit quam C; fiet ergo productum $BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2 \infty 0$.

quod quidem ſi hanc interpretationem accipiat ut $BC \infty Z^p$, & $C - B$ ſit R, habebimus æquationem propoſitam: cætera ſe habent ut ſupra.

Nec ulla eſt in duabus prædictis propoſitionibus determinatio, quia in utraque duo latera, de quibus A explicabile eſt, ſunt ſemper inæqualia.

Item nulla alia eſt inter duas haſce æquationes differentia, niſi quod in priori latus quod eſt ſupra majus eſt eo quod eſt infra, in poſteriori autem illud quod eſt ſupra minus eſt eo quod eſt infra.

Propoſitio quarta.

Si $Z^p - A^2 \infty o$.

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum eſt ſupra, alterum infra, rectangulum ſub ipſis eſt Z^p, & ſit A alterutrum ex iiſdem.

Intelligatur enim $B - A \infty O$ ſic ut $+A \infty +B$ ſupra. Item $C + A \infty O$, ſic ut A ex ſe æquetur ipſi C infra; ponaturque B æquari eidem C: itaque ſi fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit $BC \begin{smallmatrix} +BA \\ -CA \end{smallmatrix} - A^2 \infty o$. Quod ſi hanc interpretationem accipiat ut $BC \infty Z^p$, quia tollunt ſe invicem $\begin{smallmatrix} +B \\ -C \end{smallmatrix}$ habebimus æquationem propoſitam $Z^p - A^2 \infty o$, quæ explicabilis eſt tam de A ſupra æquali ipſi B, quam de A infra æquali ipſi C.

Propoſitio quinta.

Si $Z^p + A^2 \infty o$.

Nullum propriè loquendo eſt latus, ſed unicum planum æquale ipſi Z^p de quo quidem eſt explicabile ipſum A^2.

Ejuſmodi autem æquatio irregularis eſt, nec poteſt ipſa oriri ex mul-

multiplicatione, ut factum est in antecedentibus.

Nota ergo æquationes quasdam de planis tantum explicabiles esse, quod etiam ad solida & ultra in infinitum extendi, quivis satis doctus reperiet.

De constitutione æquationum cubicarum.

CAPUT PRIMUM.

Si $Z^{s} - S^{p} A + RA^{2} - A^{3} \infty 0$.

Sunt tria latera positiva supra, quorum summa est R, summa trium rectangulorum ex ipsis binis ac binis sumptis est S^{p}, solidum autem sub iisdem contentum est Z^{s}, & sit A quodvis ex ipsis tribus. *Vide posteà propositionem specialem.*

$$\text{Intelligamus enim } \begin{matrix} B - A \infty 0. \\ C - A \infty 0. \\ D - A \infty 0. \end{matrix} \text{ \& per quodvis ex istis tribus}$$

binomiis, per illud scilicet quod nihilo æquari intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus, quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorumdem productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale nihilo illud autem est.

$$BCD \begin{matrix} - BCA + BA^{2} \\ - BDA + CA^{2} \\ - CDA + DA^{2} \end{matrix} - A^{3} \infty 0.$$

Omnia autem hanc interpretationem accipiunt ut $BCD \infty Z^{s}$.

$$\text{Item} \begin{matrix} - BC \\ - BD \\ - CD \end{matrix} \infty S^{p} \ \& \begin{matrix} + B \\ + C \\ + D \end{matrix} \infty R$$

Quo pacto habebimus æquationem propositam $Z^{s} - S^{p} A + RA^{2} - A^{3} \infty 0$.

Quia

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipsum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipsius B, vel C, vel D, sicut in eandem formulam semper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipsam de eodem triplici A explicabilem esse, sub ipso triplici valore.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUJUS æquationis determinatio duplex est, altera major, in qua omnia tria latera sunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia sunt.

Major determinatio ejusmodi sortitur constitutionem ut Z^s æquale sit cubo tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum $Z^s \infty \frac{1}{27} R^3$, & S_p æquale sit triplo quadrati ejusdem tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum $S_p \infty \frac{1}{3} R^2$, patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum BCD, sive Z^s æquale ipsi B^3.

Item plana $\begin{matrix} BC \\ BD \\ CD \end{matrix}$ simul, sive $S_p \infty 3 B^2$; & tandem latera $\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}$ simul, sive R æqualia 3 B.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut $B^2 D \infty Z^s$;

Item $B^2 + 2 BD \infty S_p$ & $2 B + D \infty R$.

$$\text{Atque ita } B^2 D - B^2 A + 2 B A^2 - A^3 \infty 0.$$
$$- 2 BDA + DA^2.$$

Jam quia B est A & 2B + D est R, ideo R − 2A est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit R − 2 A.

Item B^2 est A^2, quod ductum in D id est in R − 2 A, producit $R A^2 - 2 A^3$ quæ species proinde æqualis est Z^s, & omnibus ordinatis.

$\frac{1}{4}$ Zs.

$$\tfrac{1}{2} Z^{s.} - \tfrac{1}{2} R A^2 + A^3 \infty 0.$$

Rurſus B^2 eſt A^2: & $2BD$ eſt $2RA - 4A^2$ quæ ambas ſpecies ſimul conſtituunt, $2RA - 3A^2$ ambæ autem conſtituunt S^p. Itaque $2RA - 3A^2 \infty S^p$, & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{3} S^p - \tfrac{2}{3} R A + A^2 \infty 0.$$

Hic niſi ambigua eſſet hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus ſupra, explicabilis, jam haberetur valor ipſius A; ſed quia duplex eſt valor ille, nempe, vel latus $(\tfrac{1}{9} R^2 - \tfrac{1}{3} S^p) + \tfrac{1}{3} R$, vel $\tfrac{1}{3} R$ — latere $(\tfrac{1}{9} R^2 - \tfrac{1}{3} S^p)$ eſtque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque etiam ſi utilem agnoſcere non ſit difficile, tamen quia ex comparatione quarumdem aliarum æquationum ad ſimplicem lateralem, ac de unico eoque vero latere explicabilem devenire poſſumus, ideo ſic progrediemur.

Sed ſupra etiam $\tfrac{1}{2} Z^{s.} - \tfrac{1}{2} R A^2 + A^3 \infty 0$.

Aſcendat per A depreſſior harum æquationum nempe hæc

$$\tfrac{1}{3} S^p - \tfrac{2}{3} R A + A^2 \infty 0.$$

Atque ita fiet hæc $\tfrac{1}{3} S^p A - \tfrac{2}{3} R A^2 + A^3 \infty 0$.

Huic ergo æqualis eſt $\tfrac{1}{2} Z^{s.} - \tfrac{1}{2} R A^2 + A^3 \infty 0$.

Sublatoque communi A^3 & addito $\tfrac{1}{2} R A^2$ puta per antitheſim fiet hæc æquatio.

$$\tfrac{1}{2} Z^{s.} \infty \tfrac{1}{3} S^p A - \tfrac{1}{6} R A^2.$$

Et communi diviſore $\tfrac{1}{6} R$ adhibito $\frac{3 Z^{s.}}{R} \infty \frac{2 S^p A}{R} - A^2$.

Atque omnibus ordinatis $\frac{3 Z^{s.}}{R} - \frac{2 S^p A}{R} + A^2 \infty 0$.

Sed rurſus ut ſupra $\tfrac{1}{3} S^p - \tfrac{2}{3} R A + A^2 \infty 0$.

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales ſunt, unde ſublato

 com-

communi A^2 & per antithesim fiet hæc æquatio $\frac{3 Z^{s}}{R} = \frac{1}{3} S^{p}$

$\infty \frac{2 S^{p} A}{R} = \frac{1}{3} R A.$

Itaque $\dfrac{\frac{3 Z^{s}}{R} = \frac{1}{3} S^{p}}{\frac{2 S^{p}}{R} = \frac{1}{3} R}$ est valor ipsius A

Si ergo accidat aliquam ex præmissis differentiis vel utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse nihilo minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejusmodi determinatio: sed æquatio explicari non poterit de tribus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo tamen casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra, quod proprie latus non est, sed planum, tunc autem propositio specialis est, cujus explicandæ hic est locus.

Propositio secunda specialis.

Si $Z^{s} - S^{p} A + R A^2 - A^3 \infty 0.$
Sit autem $Z^{s} \infty \frac{S^{p}}{R}$

Sunt duo latera, alterum suprà æquale ipsi R, alterum infrà non proprie latus, sed planum æquale ipsi S^{p}, & A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim $B^{p} + A^2 \infty 0.$ quæ æquatio explicabilis est de unico plano infra æquali ipsi B^{p} ut notatum est prop. 5a Æquat. quadraticarum. Item $C - A \infty 0.$ tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

Orietur ergo $B^{p} C - B^{p} A + C A^2 - A^3 \infty 0.$

Hæc

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut $B^p C \infty Z^s$. & $B^p \infty S^p$, atque $C \infty R$.

Quo pacto incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est ex generatione $Z^s \infty S^p$, & A esse æquale vel ipsi C, hoc

R

est R supra, vel A^2 est æquale ipsi B^p, hoc est S^p infra.

CAPUT SECUNDUM.

Propositio prima.

Si $Z^s - S^p A + R A^2 + A^3 \infty 0$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis simul sumptis, differentia seu excessus tertii, supra summam duorum priorum est R: at S^p est differentia seu excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id, quod sub primo & secundo, solidum autem Z^s quod sit sub tribus, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Intelligantur enim $B - A$
$C - A$
$D + A$

Quorum D sit majus ambobus B & C simul sumptis; sit autem quævis ex illis tribus speciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio solito modo orieturque,

$$\begin{matrix} & -BDA + DA^2 & \\ BCD & -CDA - BA^2 & + A^3 \infty 0. \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

& quia D majus ponitur quam B & C simul, manifestum est BC multo minus esse quam BD & CD simul sumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut $+ D - B - C$ sit $+ R$, item $- BD - CD + BC$ sit $- S^p$ & BCD sit Z^s. quo

 pacto

pacto incidemus in æquationem propoſitam

$$Z^{s} - S^{p} A + R A^{2} + A^{3} \infty 0.$$

Patet autem ex formula, A explicabile eſſe tam de B aut C ſupra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipſum triplicem hunc valorem inducere potuit.

Determinatio præcedentis æquationis.

DETERMINATIO unica eſt, nempe minor, cum ſcilicet duo latera ſupra ſunt æqualia; aliter enim æqualia eſſe non poſſunt: ſiquidem illud quod eſt infra, duobus reliquis ſimul majus eſt.

Poſito ergo quod B & C ſunt æqualia, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$\begin{aligned} B^{2} D - 2 B D A &+ D A^{2} \\ + B^{2} A - 2 B A^{2} &+ A^{3} \infty 0. \end{aligned}$$

Quoniam autem B eſt A & $D - 2B$ eſt R, ergo $D - 2A$ eſt R & perantitheſim $R + 2A$ eſt D, hanc ergo ſpeciem induat D in poſterum ut ſit $R + 2A$.

Item B^{2} eſt A^{2}, quod ductum in D, id eſt in $R + 2A$ producit $R A^{2} + 2 A^{3}$, quæ ſpecies proinde æqualis eſt Z^{s} & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2} Z^{s} - \tfrac{1}{2} R A^{2} - A^{3} \infty 0.$$

Rurſus B^{2} eſt A^{2}, & $2BD$ eſt $2RA + 4A^{2}$. Quarum ambarum ſpecierum differentia eſt $2RA + 3A^{2}$, hæc idcirco æqualis eſt S^{p} & omnibus ordinatis.

$$\tfrac{1}{3} S^{p} - \tfrac{2}{3} R A - A^{2} \infty 0.$$

Aſcendat hæc æquatio per A gradum, atque ita rurſus

$\tfrac{1}{3} S^{p}$

$$\tfrac{1}{3} S^p A - \tfrac{1}{3} R A^2 - A^3 \infty\ o.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\tfrac{1}{2} Z^s - \tfrac{1}{2} R A^2 - A^3 \infty\ o.$$

Additisque communibus A^3, & $\tfrac{1}{2} R A^2$ fiet hæc

$$\tfrac{1}{3} S^p A - \tfrac{1}{6} R A^2 \infty \tfrac{1}{2} Z^s.$$

Et communi divisore adhibito $\tfrac{1}{6} R$, erit $\frac{2 S^p A}{R} - A^2 \infty \frac{3 Z^s}{R}$.

Et omnibus ordinatis $\frac{3 Z^s}{R} - \frac{2 S^p A}{R} + A^2 \infty\ o.$

Mutatisque omnibus signis $- \frac{3 Z^s}{R} + \frac{2 S^p A}{R} - A^2 \infty\ o.$

Sed rursus supra $\tfrac{1}{3} S^p - \tfrac{1}{3} R A - A^2 \infty\ o.$

Itaque addito communi A^2 & per antithesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3 Z^s}{R} + \tfrac{1}{3} S^p \infty \frac{2 S^p A}{R} + \tfrac{1}{3} R A.$$

Itaque $\dfrac{\frac{3 Z^s}{R} + \frac{1}{3} S^p}{\frac{2 S^p}{R} + \frac{1}{3} R.}$ est valor ipsius A.

Propositio secunda.

Si $Z^s - S^p A + A^3 \infty\ o.$

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus simul sumptis.

Sp est excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id quod sub primo & secundo.

Zs. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus: ponantur enim eædem species quæ supra, nisi quod D intelligi debet æquale duobus B & C simul, fietque rursus eadem æquatio.

$$\begin{array}{ll} & -\,BDA + DA^2 \\ BCD & -\,CDA - BA^2 + A^3 \infty\, 0. \\ & +\,BCA - CA^2 \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C simul, ideo evanescet affectio sub A^2 quia $-BA^2 - CA^2$ tollunt DA^2, superest ergo tantum.

$$\begin{array}{ll} & -\,BDA + \\ BCD & -\,CDA + A^3 \infty\, 0. \\ & +\,BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD simul majora sunt quam BC.

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur Zs. & $-$BD
$-$CD æquetur $-$Sp,
$+$ BC

Incidemus in æquationem propositam Zs $-$ Sp A $+ A^3 \infty\, 0$.

Ubi manifestum est ipsum A explicabile esse tam de B & C suprà, quàm de D infra.

Determinatio rursus unica est, nempe minor, cum duo latera suprà sunt æqualia, neque enim aliter æqualia esse possunt, cum illud quod est infrà duobus reliquis simul sumptis sit æquale.

Invenietur ergo hæc determinatio sic.

Po-

Positis B & C æqualibus, æquatio talis esse poterit,
$B^2D - 3B^2A + A^3 \infty 0$ unde $Sp \infty 3B^2$. *

Posito ergo, quod B sit A ex hypothesi determinationis, tunc $Sp \infty 3A^2$.

Itaque $\frac{1}{3}$ Sp, est valor ipsius A^2 & $Zs \infty 2A^3$.

* *Quoniam* D *æquatur* B & C *simul, ac* B & C *simul in* D *æquales sunt* $4B^2$, *ex quibus sublato* BC *quod est* B^2 *restat* $3B^2$.

Propositio tertia.

Si $Zs - SpA - RA^2 + A^3 \infty 0$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus duobus prioribus simul sumptis, excessus summæ duorum priorum supra tertium est R, at rursus ut in duabus præcedentibus propositionibus summa duorum rectangulorum, ejus scilicet, quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio excedit id quod sub primo & secundo, & excessus est Sp; Zs. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Ponantur enim eædem species quæ suprà, ea tamen lege ut D intelligatur minus quàm B & C simul, & rectangula BD & CD simul majora quàm BC, fietque rursus hæc æquatio ut suprà, nempe

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \infty 0. \\ + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut excessus B & C simul suprà D, sit R; at excessus rectangulorum BC & CD simul suprà BC, sit Sp; item solidum BCD sit Zs, incidemus in æquationem propositam

$$Zs - SpA - RA^2 + A^3 \infty 0.$$

Ubi manifestum est A explicari posse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

De-

Determinatio præcedentis æquationis.

Hujus propoſitionis determinatio triplex eſſe poteſt, prima major, cùm omnia tria latera ſunt æqualia; ſecunda, cùm duo latera ſuprà tantùm ſunt æqualia; & tertia, cùm alterum eorum laterum, quæ ſunt ſuprà, æquale eſt ei quod eſt infrà. Utraque autem harum poſteriorum minor eſt, quam idcirco hic accidit eſſe duplicem.

Et quidem major determinatio facillima eſt.

Poſitis enim B, C, D æqualibus, factaque binomiorum multiplicatione, & ſublatis quæ ſe invicem deſtruunt, manifeſtum eſt ſupereſſe

$BCD — BDA — BA^2 + A^3 \infty o.$

Sive quod idem eſt $B^3 — B^2A — BA^2 + A^3 \infty o.$

Itaque Zs eſt B^3 ſive A^3.

Sp eſt B^2 ſive A^2 & R, eſt B ſive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cùm ſcilicet duo latera ſuprà ſunt æqualia, inſtituitur modo præmiſſo, tam in prima propoſitione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima ſecundi capitis: poſitis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut ſuprà in prædictis propoſitionibus, præcipuè vero ut in prima ſecundi capitis, niſi quod hic D invenietur eſſe $2A — R$, reperiemus tandem valorem ipſius A eſſe

$$\frac{\frac{3Zs — \frac{1}{3}Sp}{R}}{\frac{2Sp + \frac{2}{3}R}{R}}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cum ſcilicet

cet alterum laterum ſuprà æquale eſt ei quod eſt infra, facilis eſt: poſito enim quod B ſit æquale ipſi D in formula præmiſſa, ac ſublatis iis quæ ſe invicem tollunt, remanebit hæc æquatio, $B^2C - B^2A - CA^2 + A^3 \infty 0$.

Itaque in æquatione propoſita $Z^s \infty B^2C$, $S^p \infty B^2$, & $R \infty C$:

At C eſt unum ex duobus lateribus ſuprà, itaque ipſum R eſt unum ex lateribus ſuprà.

Item eadem ratione B^2 ſive S^p eſt quadratum alterius lateris ſuprà, idemque quadratum ejus quod eſt infrà: ergo A explicabile eſt, tam de R ſuprà, quam de S ſuprà & infrà.

Propoſitio quarta.

Si $Z^s - RA^2 + A^3 \infty 0$.

Sunt tria latera quorum duo ſunt ſuprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, exceſſus ſummæ duorum priorum ſupra tertium, eſt R. At ſumma duorum rectangulorum ejus ſcilicet quod ſub primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, æqualis eſt ei quod ſub primo & ſecundo. Z^s autem eſt id quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus.

Reſumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{matrix} & -BDA + DA^2 & \\ BCD - CDA & - BA^2 + A^3 \infty 0. \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

Intelligaturque D minus eſſe quàm B & C ſimul, & ſingula: at rectangulum BC æquale ſit ambobus ſimul BD & CD, itaque tollunt ſe invicem ipſa rectangula, & ſic evaneſcit affectio ſub latere A, quia B & C ſimul ſuperant D; differentia eſto R, & ſolidum BCD vocetur z ſolidum, quo pacto incidemus in æquationem propoſitam, nempe

$$Z^{ſ} - RA^{2} + A^{3} \infty 0.$$

Ubi palam eſt A explicari poſſe, tam de B & C ſuprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUJUS propoſitionis unica eſt determinatio, eaque minor, cùm ſcilicet duo latera ſuprà ſunt æqualia: neque enim aliter æqualia eſſe poſſunt, quia unumquodqne eorum quæ ſunt ſuprà, majus eſt eo quod eſt infrà.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præmiſſa, ſublatis quæ ſe invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$\begin{aligned} B^{2}D + DA^{2} \\ - 2BA^{2} + A^{3} \infty 0. \end{aligned}$$

Jam quia B eſt A & $2B - D$ eſt R, ideo $2A - R$ eſt D. Item quia BD & CD ſimul æqualia ſunt BC, ideo ſi loco tam B quàm C ſumatur A, & loco ipſius D ſumatur $2A - R$ fiet hæc æquatio.

$$4A^{2} - 2RA \infty A^{2} \text{ hoc eſt } 3A^{2} - 2RA \infty 0.$$

Et communi diviſore $3A$ fiet $A - \frac{2}{3}R \infty 0$.
Quapropter $\frac{2}{3}R$ eſt valor ipſius A.

Propoſitio quinta.

SI $Z^{ſ} + S^{p}A - RA^{2} + A^{3} \infty 0$.

Sunt tria latera, quorum duo ſunt ſuprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, ita ut exceſſus ſummæ duorum priorum, ſuprà tertium ſit R; at ſumma duorum rectangulorum, ejus ſcilicet quod ſub primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, minor eſt eo rectangulo, quod fit ex primo & ſecundo;

ſecundo; differentia autem eſt S^p; Z^f autem eſt id quod ſub tribus lateribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic reſumimus

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA - BA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \infty\, o. \\ \quad\;\; + BCA + DA^2 \end{array}$$

Intelligantur latera B & C tam ſimul quàm ſigillatim, majora eſſe quàm D, & rectangulum BC majus quàm duo ſimul BD & CD. Quo poſito & adhibita hac interpretatione ut exceſſus ſummæ laterum B & C ſuprà D ſit R; item exceſſus rectanguli BC ſuprà ſummam reliquorum BD & CD ſit S^p, at ſolidum BCD ſit z^f. manifeſtum eſt nos incidere in æquationem propoſitam, & A explicabile eſſe tam de B & C ſuprà, quàm de D infra.

Determinatio.

HUJUS æquationis determinatio unica eſt eaque minor, tum ſcilicet duo latera ſuprà æqualia ſunt, neque alia reperiri poteſt laterum æqualitas, cum unumquodque ex duobus prioribus majus ſit quàm tertium.

Poſito ergo quod B ſit æquale ipſi C in formula præmiſſa, & argumentando ut in prima propoſitione primi capitis, aut prima ſecundi æquationum cubicarum, inveniemus D eſſe $2A - R$, & S^p eſſe $2RA - 3A^2$, unde tandem deducetur valor ipſius A,

$$\frac{\dfrac{3Z^f + \frac{1}{3}S^p}{R}}{\frac{2}{3}R - \dfrac{2S^p}{R}}$$

 Propo-

Propositio sexta irregularis.

Si $Z^s + S^p A + A^3 \infty 0$.

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit Z^s; rectangulum autem sub extremis vel mediis sit $\frac{1}{3} S^p$,

$\overline{\tfrac{1}{3} S_p}$

& A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum communem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam rarò aut nunquam accidit.

Propositio septima irregularis.

Si $Z^s + R A^2 + A^3 \infty 0$.

Rursus in hac æquatione A explicabile est de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri possit. Facile tamen hæc æquatio transmutabitur in aliam similem ei, quæ habetur propositione 6ª seu præcedenti, unde constitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut suprà; sed neque alia esse potest, quàm præcedentis, utilitas.

Propositio octava irregularis.

Si $Z^s + A^3 \infty 0$.

Unicum etiam est latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipsius Z^s.

C A-

CAPUT TERTIUM.

Hoc caput tot propositiones habet, quot præcedens, atque has illarum sigillatim inversas, hac ratione, ut quæ illic suprà erant latera, hic sint infrà, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite sunt penitus eædem: itaque exposita formula universali, quinque priorum propositionum regularium, enumeratisque breviter singulis octo propositionibus, reliqua ad idem caput præcedens remittemus.

Pro formula igitur universali, intelligantur duo latera infrà, & unum suprà hac ratione

$$B + A \propto o.$$
$$C + A \propto o.$$
$$D - A \propto o.$$

fiatque multiplicatio qualem consuevimus habita ratione signorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{matrix} & + BDA - BA^2 & \\ BCD & + CDA - CA^2 & - A^3 \propto o. \\ & - BCA + DA^2 & \end{matrix}$$

Qua ratione duo latera infrà intelliguntur æqualia ipsis B & C; illud autem quod est suprà, intelligitur æquale ipsi D.

Jam differentia inter summam laterum B & C & unicum D, esto R; differentia autem inter summam rectangulorum BD & CD atque unicum BC, esto S^p: item solidum BCD esto Z^s. Hoc pacto prout excessus erit penes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propositiones regulares.

Propositio prima.

Si $Z^s + S^p A + RA^2 - A^3 \propto o.$

Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum suprà, idemque majus summa duorum priorum, & differentia est R; rectangulum autem sub summa priorum & tertio excedit rectangulum sub duobus prioribus, & excessus est S^p. At Z^f est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Determinatio.

PRO determinatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis quæ hic sunt infra, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\frac{\frac{3Z^f + \frac{1}{3}S^p}{R}}{\frac{2S^p + \frac{2}{3}R}{R}}$$

Propositio secunda.

Si $Z^f + S_p A - A^3 \infty 0$.

Vide secundam propositionem 2^i capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

Propositio tertia.

Si $Z^f + S^p A - R A^2 - A^3 \infty 0$.

Vide tertiam secundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

Pro-

Propoſitio quarta.

SI $Zſ. - RA^{2} - A^{3} \infty o.$

Vide iiſdem mutatis, quartam ſecundi capitis ejuſque determinationem.

Propoſitio quinta.

SI $Zſ - SPA - RA^{2} - A^{3} \infty o.$

Vide iiſdem mutatis quintam propoſitionem 2ⁱ capitis ejuſque determinationem.

Propoſitio ſexta irregularis.

SI $Zſ - SPA - A^{3} \infty o.$

Unicum eſt latus ſuprà, pro quo vide ſextam propoſitionem ſecundi capitis. Notabis tamen hanc utilem eſſe poſſe.

Propoſitio ſeptima irregularis.

SI $Zſ + RA^{2} - A^{3} \infty o.$

Unicum eſt latus ſuprà pro quo vide ſextam propoſitionem 2i capitis. Notabis tamen hanc utilem eſſe poſſe.

Propoſitio octava irregularis.

SI $Zſ. - A^{3} \infty O.$

Unicum eſt latus ſuprà, æquale lateri cubico Zſ.

CAPUT QUARTUM.

Hoc etiam caput inverſum eſt primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quòd quæ illic erant latera ſuprà, hic ſunt infrà, idque in prima propoſitione, quæ prorſus regularis eſt: at in

in ſecunda, quæ aliquo pacto eſt irregularis, ambo latera remanent infrà, etiamſi illic alterum eſſet ſuprà, alterum infrà, nec etiam in ambabus formula eſt eadem, quapropter utramque hic apponemus etiamſi utraque ſit inutilis, niſi ex tranſmutatione aliunde oriatur, quod etiam rarò, aut nunquam accidere poteſt.

Propoſitio prima.

Si $Z^{s.} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \infty\ 0.$
Et $Z^{s.}$ non ſit æquale ipſi $S^{p}.$

$\overline{R}$

Sunt tria latera poſitiva infrà, quorum ſumma eſt R, tria rectangula ſub ipſis, binis ac binis ſumptis ſimul, conſtituunt S^{p}: at $Z^{s.}$ eſt quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis.

Statuantur enim tria latera poſitiva infrà, in binomiis ut conſuevimus hoc pacto

$$B + A \infty\ 0.$$
$$C + A \infty\ 0.$$
$$D + A \infty\ 0.$$

& fiat multiplicatio ut in ſuperioribus, orieturque

$$\begin{array}{cccc} & + BDA & + BA^{2} & \\ BCD & + CDA & + CA^{2} & + A^{3} \infty\ 0. \\ & + BCA & + DA^{2} & \end{array}$$

quæ æquatio ſi hanc interpretationem accipiat, ut $B + C + D$ ſit R; & $BD + CD + BC$ ſit S^{p}, item BCD ſit $Z^{sol.}$, incidemus in æquationem propoſitam, ubi manifeſtum eſt A explicabile eſſe tam de B, quàm de C, & de D, infrà.

Determinatio eadem prorſus eſt, quæ in prima propoſitione primi

mi capitis cubicarum, atque id tam in majori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

Propositio secunda.

SI $Z^{s} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \infty 0.$
Sit autem $Z^{s} \infty S^{p}$.

———
R

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi R, alterum autem non proprie latus, sed planum æquale S^{p}, & Z^{s} est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive $S^{p}R$, & A explicabile est de quolibet.

Statuatur enim $R + A \infty 0.$
& $S^{p} + A^{2} \infty 0.$
ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita orietur hæc æquatio.

$$RS^{p} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \infty 0.$$

Jam RS^{p} esto Z^{s}, qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est, tam de A æquali, ipsi R, quàm de A æquali potentiæ ipsi S^{p}, ut est propositum.

Notæ circa æquationes præmissas, & circa eas, quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.

Prima.

OMNIS affectio sub latere positivo suprà, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprà, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de

affectionibus ſub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejuſdem lateris poſitivi ſuprà.

Secunda.

UT autem innoteſcat etiam quid cenſendum ſit de affectionibus ſub latere poſitivo infrà ejuſque gradibus, & potentiis, præmittendum eſt primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrà æquivalere negativo ſuprà, & è contrario.

Deinde circa latera ſuprà, ideo + multiplicatum per + producere +, quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem — per — producere +, quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita conſtituit affirmationem. At + per — vel — per +, ideo producere —, quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita conſtituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infra, æquivalet negativo ſuprà, omnis affectio ſub latere poſitivo infrà, ſequitur contrariam ſui ſigni naturam, ita ut ſi ſit affirmativum infrà, æquivaleat negativo ſuprà & è contrario. Contra verò quadratum lateris poſitivi infrà, æquivalet quadrato lateris poſitivi ſuprà, quia fit ex + A in + A, vel ex — A in — A, unde quovis modo fit + A² ſuprà, vel æquivalens. Itaque omnis affectio ſub quadrato lateris poſitivi infrà, ſequitur naturam ſui ſigni affirmativi vel negativi: in altioribus verò gradibus, ſimili argumento concludemus idem accidere affectioni ſub cubo, quod ſub ſuo latere: & quadratoquadrato, quod ſuo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui ſtatuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipſum; qui autem ſtatuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Inſuper omnis affectio, quæ retinet naturam ſui ſigni, ducta in affectionem, quæ itidem naturam ſui ſigni retineat, producit aliam,

aliam, quæ etiam naturam sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

Tertia.

Ex duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cùm ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa quadratas & cubicas affectiones, producatur tandem æquatio quæ nihilo æquivaleat, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticarum, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} \quad + BA \\ BC - CA - A^2 \infty 0. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta est ex ductu affectionum B — A & C + A in se invicem, intelligatur ergo primo casu, B suprà æquari ipsi A suprà; unde B — A æquatur nihilo; quia tam B quàm A, cùm sint suprà, sequuntur naturam sui signi, quæ signa cùm sint contraria, manifestum est B & A tollere se invicem.

Jam C + A cujuscumque valoris sit ducatur in B — A, fit rursus manifestò

$$\begin{array}{l} \quad + BA \\ BC - CA - A^2 \infty 0. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, quia quæ ipsas

produxerunt, ſui ſigni naturam ſequebantur, & quia B æquatur A, ideo BC æquatur CA, quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem $+BC-CA$.

Item BA æquatur A^2, quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem $+BA-A^2$, atque ita omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent, dum ſcilicet B æquatur ipſi A ſuprà.

Sed ſecundo caſu, eſto C ſuprà æquale ipſi A infrà: unde $C+A$ æquatur nihilo, quia ipſum $+A$ infrà ſequitur contrariam ſui ſigni naturam, æquivaletque ipſi $-A$ ſuprà, ſicque tollunt ſe invicem $+C+A$.

Jam $B-A$ cujuſcumque valoris ſit, ducatur in $C+A$, fit manifeſtò

$$\begin{matrix} & +BA & \\ BC & -CA & -A^2 \infty 0. \end{matrix}$$

Ubi duæ affectiones ſub latere A, ſcilicet $\begin{matrix}+BA\\-CA\end{matrix}$, ſequuntur contrariam ſui ſigni naturam; at $-A^2$ & $+BC$ ſui ipſius ſigni naturam ſequuntur; & quia C æquatur A, ideo BC æquatur BA, & CA æquatur A^2, quare tollunt ſe invicem $+BC+BA$, quia BC eandem, BA vero contrariam ſui ſigni ſequitur naturam. Eadem ratione tollunt ſe invicem $-CA-A^2$ quia CA contrariam, A^2 vero eandem ſui ſigni naturam ſequitur: atque ita rurſus omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent, cùm ipſum C ſuprà æquetur ipſi A infrà.

Cùm vero ſic interpretamur æquationem ut BC ſit Z^p, at $\begin{matrix}+B\\-C\end{matrix}$ ſit R, ut ſic $Z^p+RA-A^2 \infty 0$. Patet ipſum R, eſſe differentiam inter B majus & C minus, quia illæ affectiones $+BA$ & $-CA$ habent ſigna diverſa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam ſui ſigni naturam ſequuntur, impediunt ergo ſigna diverſa ne ſimul jungi debeant.

Item

Item in hac æquatione $Z^p + RA - A^2 \infty o$.

Dum A intelligitur eſſe ſuprà, omnes affectiones ſunt ſuprà, ſequuntur que naturam ſui ſigni, & ſic ſola affectio A^2 æquatur reliquis duabus ſimul.

E contrario vero cum A intelligitur eſſe infrà, tum Z^p & A^2 ſequuntur naturam ſui ſigni, R A vero contrariam, ſicque $+ RA$ infrà æquivalet $- RA$ ſuprà. Unde $+ RA - A^2$ ſimul æquivalent ipſi Z^p.

Jam in ſecundo exemplo proponatur æquatio propoſitionis primæ ſecundi capitis cubicarum

$$Z^s - S^p A + RA^2 + A^3 \infty o.$$

Cujus conſtitutionem deduximus ex multiplicatione ſive ductu harum trium affectionum,

$$B - A$$
$$C - A$$
$$D + A$$

Ex quo oritur hæc æquatio, poſito tamen quod D majus ſit quàm B & C ſimul.

$$\begin{matrix} & - BDA + DA^2 & \\ BCD & - CDA - BA^2 + A^3 \infty o. \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

Quam quidem æquationem legitimam eſſe, ſive B ſuprà æquetur A ſuprà, ſive C ſuprà æquetur A ſuprà, ſive tandem D ſuprà æquetur A infrà, ſic oſtendimus.

Ponamus primo caſu B ſuprà æquari A ſuprà, unde $B - A \infty o$.

Jam ſub ipſo valore A, quicquid valeat tam $C - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{c} +CA \\ CD - DA - A^2; \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ sunt, sunt suprà. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in B — A, atque ita tandem orietur

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \\ +BCA - CA^2 \end{array}$$

Cujus omnes affectiones sequuntur sui signi naturam, propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipsi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt se invicem + BCD — CDA; eadem ratione tollunt se invicem — BDA + DA²: item + BCA — CA², ac tandem — BA² + A³, unde patet omnes affectiones simul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipsi A.

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde C — A ∞ 0.

Jam sub ipso valore A quicquid valeat tam B — A, quàm D + A, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BD - DA - A^2 \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà. Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in C — A, orietur rursus ut in primo casu

— BDA

$$\begin{array}{l} \quad -BDA+DA^2 \\ BCD-CDA-BA^2+A^3 \infty 0. \\ \quad +BCA-CA^2 \end{array}$$

Ubi etiam omnes affectiones ſequuntur naturam ſui ſigni propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipſi A, ideo BCD æquatur ipſi BDA, atque ita tollunt ſe invicem $+BCD$ $-BDA$: eadem ratione tollunt ſe $-CDA+DA^2$; item $+BCA-BA^2$: ac tandem $-CA^2+A^3$. Unde patet quod exiſtente C æquali ipſi A, omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo caſu, intelligatur D ſuprà æquari A infrà. Quo pacto $D+A \infty 0$.

Jam ſub ipſo valore A, quicquid valeat tam $B-A$, quàm $C-A$, ducantur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{l} \quad -BA \\ BC-CA+A^2; \end{array}$$

Ubi, quia tam B, quàm C ſunt ſuprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A^2 ſequuntur naturam ſui ſigni, duæ verò reliquæ $\begin{array}{c} BA \\ CA \end{array}$ contrariam. Hoc autem totum productum quicquid valeat, ducatur in $D+A$, orieturque idem omnino quod primo & ſecundo caſu, nempe

$$\begin{array}{l} \quad -BDA+DA^2 \\ BCD-CDA-BA^2+A^3 \\ \quad +BCA-CA^2 \end{array}$$

Hic verò omnes affectiones ſub latere A, atque etiam cubi A, ſequuntur contrariam ſui ſigni naturam per regulas præmiſſas, quia oriuntur ex multiplicatione affectionum, BD, CD, BC,
&

& A^2, quæ omnes ſequuntur naturam ſui ſigni in A quod ſequitur contrariam.

Quoniam ergo D ſuprà ponitur æquale A infrà, ideo BCD æquatur BCA, unde tollunt ſe invicem + BCD + BCA: nam etiam ſi ſigna ſint eadem, tamen natura eſt contraria. Eadem ratione tollunr ſe invicem — BDA — BA^2, item — CDA — CA^2, & denique + DA^2 + A^3.

Unde patet quod exiſtente D ſupra æquali ipſi A infrà, omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent. Sive ergo B vel C ſuprà æquetur ipſi A ſuprà, ſive D ſuprà æquetur A infrà ſemper ſtabit æquatio, & omnes affectiones ſimul nihilo æquivalebunt.

Itaque in æquatione propoſita Z^s — $S^p A$ + RA^2 + A^3 ∞ o.

S^p intelligitur eſſe differentia inter ſummam duorum planorum BD, CD, & planum BC: at longitudo R eſt differentia inter ſummam laterum B, C, & latus D, quæ ſunt æqualia tribus illis de quibus poteſt explicari A, in æquatione. Rurſus cùm in eadem æquatione A intelligatur eſſe ſuprà, tune omnes affectiones ſequuntur naturam ſui ſigni, unde ſola affectio $S^p A$ æquatur tribus reliquis ſimul ſumptis. Contrà verò cùm A intelligitur eſſe infrà, tunc affectiones ſub latere A & ipſius cubo A^3 ſequuntur naturam contrariam ſui ſigni, duæ autem reliquæ eandem, unde — $S^p A$ infrà æquivalet + $S^p A$ ſuprà, & + A^3 infrà æquivalet — A^3 ſuprà, ſicque ſola affectio A^3 æquatur tribus reliquis ſimul ſumptis.

His duobus exemplis rite perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

Quarta.

CUM autem planum aliquod ex ſe ponitur ſequi naturam contrariam ſui ſigni, tunc occurrere poſſet difficultas circa affe-

ſectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejuſdem lateris, quæ difficultas etiamſi non difficilè ſolvi poſſit, ſpeciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen prolixa eſſet ſolutio, præcipuè quia extendi deberet non ad planum tantùm, ſed etiam ad gradus altiores, ideo nos ſolutionem afferemus in univerſum, quæ ad quaſcumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi poteſt, eamque aliquo exemplo illuſtrabimus.

Intelligatur ergo B^p ſuprà $+ A^2$ infrà ∞ o. Ubi manifeſto A^2 quod planum eſt, ſequitur naturam ſui ſigni contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta ſit ex multiplicatione hujus affectionis $B^p + A^2$ in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A ſit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale ſit ipſi B^p. Ut oſtendamus omnes affectiones æquationis ſimul nihilo æquivalere ſic ratiocinabimur. Quia affectio $B^p + A^2$ in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum eſt in ipſam duci primum ſeparatim B^p quod ſequitur naturam ſui ſigni, deinde in eandem duci ſeparatim A^2 quod ſequitur contrariam: quicquid ergo producat B^p, id omne ſimul, æquale eſt ei, quod producitur ab A^2 propter æqualitatem B^p & A^2; ſed & ſingula producta ſingulis productis ſunt æqualia propter eandem rationem, & in ſingulis æqualibus ſigna erunt eadem, quia B^p & A^2 habent idem ſignum. At propter contrariam naturam B^p & A^2 ſingula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcirco tollent ſe invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo ſit æqualis, ut proponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifeſtum ſit, intelligatur $B^p - A^2 \infty$ o, ſintque tam B^p quàm A^2 ſuprà, & utrumque ſequatur naturam ſui ſigni. Tunc facta multiplicatione, ut dictum eſt, ſingula producta ſingulis ſunt æqualia & ejuſdem naturæ; ſed ſigna erunt contraria, quia B^p & A^2 habent contraria, atque ita rurſus tollent ſe invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo ſit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in secunda propositione primi capitis cubicarum, $B^p + A^2 \infty 0$. Ita ut B^p sit suprà, at A^2 infrà, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuscumque sit valoris $C - A$ orietur manifestò $B^pC - B^pA + CA^2 - A^3$, sed ita ut $+ B^pC - B^pA$ fiat speciatim ex ductu B^p in $C - A$; at $+ CA^2 - A^3$ fiat ex A^2 in $C - A$. Quia ergo $+ B^p$ ducitur in $+ C$ & producit B^pC, & $+ A^2$ ducitur in idem C & producit CA^2, sunt autem æqualia B^p & A^2, atque idem possident signum, erunt æqualia producta B^pC, CA^2, idemque signum possidebunt: at quia diversæ sunt naturæ B^p & A^2, illud scilicet B^p sequitur eandem sui signi naturam, hoc verò A^2 contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem sui signi naturam, alterum verò contrariam sequatur: tollent igitur se invicem $+ B^pC$ & $+ CA^2$. Eadem ratione quia B^p & A^2 æqualia sub eodem signo, sed diversæ naturæ ducuntur sigillatim in A & producunt $- B^pA - A^3$, erunt hæc producta æqualia & sub eodem signo, sed diversæ naturæ: ipsa ergo tollent se invicem, unde tota æquatio nihilo æquivalet. Nec erit difficile simili argumento uti in quibuscumque æquationibus, semper enim singulæ affectiones singulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel signa erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & signa contraria, sicque tollent se invicem singulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æquivalebit.

Quinta.

OPERÆ etiam pretium est scire quot modis complicari possint affectiones speciales, ut ex iis affectiones universales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad hoc autem habenda primum est ratio numeri graduum ex quibus ipsa potentia componitur: nam quot modis potentia ipsa ex suis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones

ctiones speciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per se, latus tantùm est. Planum fit vel per se, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per se, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per se, vel ex solido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planosolidum fit vel per se, vel ex planoplano & latere, vel ex solido & plano, vel ex solido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidosolidum fit vel per se vel ex planosolido & latere, vel ex planoplano & plano, vel ex planoplano & duobus lateribus, vel ex duobus solidis, vel ex solido & plano & latere, vel ex solido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex sex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda est ratio affectionum specialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per se æquationem aliquam constituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis est, omnino autem quævis æquatio superioris ordinis formari potest ex duabus vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in se ductis, atque id tot modis quot jam diximus potentias ex suis gradibus gigni posse. Exempli gratia, æquatio cubocubica potest formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cæt.

Hinc patet eò pluribus modis complicari posse affectiones speciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior est illa æquatio, seu quò altior est illius potentia: atque ipsam altiorem gigni posse ex omnibus inferioribus debitè complicatis nullâ exceptâ, & præterea eandem per se ipsam constitui aliquando nullo inferiorum habito respectu.

Sexta.

ILLUD autem notatu digniſſimum eſt, quamcunque æquationem de tot lateribus explicabilem eſſe, quot ſunt illa de quibus explicari poſſunt omnes affectiones, ſeu æquationes ſpeciales a quibus illa producta eſt. Immo & latera illius lateribus illarum ſingula ſingulis eſſe æqualia ſive potiùs eadem; atque adeo ejuſdem affectionis & naturæ.

Exempli gratia æquatio lateralis ut $B - A \infty 0$. de unico tantùm latere ſuprà explicabilis eſt, ſicut & $C - A \infty 0$. At ambæ invicem ductæ producunt quadraticam æquationem

$$\begin{array}{l} \quad - BA \\ BC - CA + A^2 \infty 0. \end{array}$$

Quæ de iiſdem duobus lateribus ſuprà eſt explicabilis.

Rurſus ſi hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem $D + A \infty 0$; quæ de unico latere infrà explicari poteſt, producetur hæc æquatio cubica

$$\begin{array}{l} \quad - BDA - BA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \infty 0. \\ \quad + BCA + DA^2 \end{array}$$

Quæ de tribus iiſdem lateribus explicabitur, duobus quidem ſuprà, altero verò infrà.

Eodem modo ſi ipſa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producetur æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica $Z^{s.} - S^{p} A - A^3 \infty 0$.

De unico tantùm latere ſuprà eſt explicabilis

Hæc quadratica $B - RA - A^2 \infty 0$.

De

De duobus , altero ſuprà , & altero infrà : his ergo duabus æquationibus in ſe invicem ductis fiet hæc quadratocubica

$$\begin{array}{l} \quad -B^{p}S^{p}A+RS^{p}A^{2}-B^{p}A^{3} \\ B^{p}Z^{s}-RZ^{s}A-Z^{s}A^{2}+S^{p}A^{3}+RA^{4}+A^{5}\infty o. \end{array}$$

Quæ de tribus iiſdem lateribus, duobus quidem ſuprà, & tertio infrà, eſt explicabilis, atque ita de reliquis.

Cùm verò quædam æquatio per ſe ipſam conſtituitur, nec conſtare poteſt ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantùm latere contingit explicari poſſe, quales ſunt omnes illæ irregulares de quibus diximus ſuprà cap. 2° & 3° cubicarum.

Præterea ſi accidat omnia latera alicujus æquationis eſſe fictitia, & impoſſibilia, ejuſmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus ſecundæ æquationis tantùm explicabilis erit ; quòd ſi etiam ſecundæ illius latera omnia fictitia ſint, quæ ex ambabus primâ ſcilicet & ſecunda oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impoſſibilia. At ſi duarum priorum æquationum latera quædam fictitia ſint & quædam poſitiva, tunc æquatio quæ ab ipſis duabus producitur, tot latera habebit poſitiva quot in duabus a quibus producta eſt, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo eſto hæc æquatio quadratica

$$Z^{p}-RA+A^{2}\infty o.$$

& intelligatur Z_{p} majus eſſe quàm $\frac{1}{4}R^{2}$; unde duo latera de quibus aliàs explicabilis eſſet ipſa æquatio, ſunt fictitia : eſto quoque hæc æquatio lateralis $B-A\infty o.$ de unico latere ſuprà explicabilis, ducanturque in ſe invicem æquationes ipſæ, unde producetur hæc æquatio cubica

 —BRA

$$\begin{array}{l} -BRA+BA^2 \\ Zp\,B-Zp\,A+RA^2-A^3 \infty o. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantùm latere suprà est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

Corollarium.

Ex hac nota intelligi potest methodus, quâ dignosci poterit num æquatio proposita habeat quænam latera fictitia, an verò omnia sint positiva, an etiam omnia fictitia: illud autem aliquando & longissimæ & difficillimæ indagationis est, præcipuè in æquationibus ultra cubum elatis & multipliciter affectis. In universum autem considerandum erit quot modis æquatio proposita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel positiva, quidve tam hæc quàm illa efficiant, dum inter se multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod a parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod a parte laterum positivorum exempli gratia, proposita hac æquatione cubicâ

$$Cf.-Dp\,A+FA^2-A^3 \infty o.$$

Cujus formula similis est ei quam sub finem notæ sextæ adduximus, patet eam produci potuisse a duabus, alterâ planâ, sub hac formula

$$Zp-RA+A^2 \infty o.$$

Altera autem laterali sub hac formulâ $B-A \infty o$. Unde æquationis productæ formula est hæc, quæ etiam ibi adducta est

$-BRA$

$$-BRA+BA^2$$
$$Z^pB-Z^pA+RA^2-A^3.$$

Conferantur ergo inter ſe ſingula homogenea ambarum ipſarum æquationum, ſcilicet C^s. cum Z^pB, item D^p cum ambobus ſimul BR & Z^p, & longitudo F, cum ambabus B & R: his enim collatis ſi reperiatur Z^p majus eſſe quàm $\frac{1}{4}R^2$, concludemus latera æquationis planæ fuiſſe fictitia, atque adeo & eadem, in æquatione cubicâ, fictitia eſſe. Quòd ſi Z^p non ſit majus quàm $\frac{1}{4}R^2$, erunt in utraque æquatione latera poſitiva. Verùm tota difficultas conſiſtit in modo & ratione examinandi: hîc enim in exemplo, videndum eſſet, num longitudo F ſic dividi poſſit in duas partes, quæ referant B & R, & rectangulum ſub ipſis demptum ex D^p relinquat $\frac{1}{4}$ quadrati alterutrius partium, putà ipſius R. Ac præterea C^s. applicatum ad reliquam partem exhibeat idem $\frac{1}{4}R^2$, hoc enim caſu æquatio propoſita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia ſimul æquivalebunt primæ portioni ipſius F, putà ipſi R, eritque hic caſus minoris majoriſve determinationis.

Aliter, quod tamen eódem recidit, dividatur longitudo F, ſic ut rectangulum ſub partibus unà cum $\frac{1}{4}$ quadrati unius portionum æquale ſit D^p, eſt autem hujuſce diviſionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc ſi diviſio fieri non poſſit, ſtatim pronuntiare licet æquationis planæ latera fuiſſe fictitia. Si autem diviſio fieri poſſit, ſitque ipſa maxima eademque unica, cùm ſcilicet altera pars ipſi B correlata, erit $\frac{1}{3}F$, altera autem ipſi R correlata, erit $\frac{2}{3}F$, tunc niſi C^s ſit præciſe $\frac{1}{27}F^3$, erit rurſus æquatio plana, fictitia: exiſtente autem C^s. æquali ipſi $\frac{1}{27}F^3$, erit tunc caſus majoris determinationis, de qua dictum eſt propoſ. prima, cap. 1. cubicarum. At verò ſi facta diviſione longitudinis F, ut dictum eſt, non

non incidamus in maximam, cùm ſcilicet portio ipſi B correlata non erit $\frac{1}{3}$ F, ſed major, vel minor (duplex enim hoc caſu contingere poteſt ſolutio) tunc ſi ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipſi B correlatæ ſunt, in $\frac{1}{4}$ quadrati alterius ſibi congruentis, fiat ſolidum æquale ipſi C^{f}, habebitur caſus minoris determinationis, in quo tria latera erunt poſitiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum ſumma erit illa portio longitudinis F, quæ ipſi R correlata eſt, & tertium ſingulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipſi B correlata. Quòd ſi ex duobus illis ſolidis quæ hac ratione fieri poſſunt, (videlicet ob duplicem ſolutionem, quæ contingere poteſt, diviſa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiatur ipſi C^{f}, ſit autem hoc C^{f}, maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt poſitiva, ſed inæqualia. Si tandem C^{f}, vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc caſu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac ſolum reliquum illud erit poſitivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



DE GEOMETRICA PLANARUM ET CUBICARUM ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

AUCTORE

ÆGIDIO PERSONERIO DE ROBERVAL.

DE

GEOMETRICA PLANARUM

ET

CUBICARUM

ÆQUATIONUM

RESOLUTIONE.



ÆQUATIONEM geometricè reſolvere, eſt invenire geometricè omnia latera de quibus ipſa æquatio explicabilis eſt.

Inventio autem ejuſmodi laterum dicitur eſſe geometrica, cùm illa deducitur ex locis propriis ſecundùm geometriæ leges deſcriptis, atque inter ſe certo ac legitimo modo compoſitis; ita ut ex ipſorum locorum ſectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæſita exhibeant.

Quoniam verò iſta laterum inventio pendet a locis geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipſis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque conſtitutionem, tum etiam circa eorumdem diviſionem, ac diverſos gradus; ut quæ ſimpliciora ſunt, a magis compoſitis diſtinguantur.

Locus ergo geometricus in univerſum, eſt magnitudo quædam ex qua deduci poſſunt quotcunque aliæ magnitudines ſecundum eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem ſortiantur proprietatem.

De locis ejuſmodi complures libros antiqui conſcripſere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; ſed illi temporis injuria, ſummo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum inſtaurationem hîc intendimus, quia ad noſtrum inſtitutum, paucis iiſque non admodùm difficilibus, e-

gemus. Non abs re tamen fore judicavimus ſelectiores aliquot ex illuſtrioribus locis in exemplum hîc afferre, quò eorum natura & conſtitutio magis eluceſcat. Nec ultra conſtructionem ſeu compoſitionem ipſorum progrediemur: demonſtrationem autem, quia plerumque nimis longa eſt, ad eam partem geometriæ quæ talem materiam tractare debet, remittemus.

Tab.X. Fig. 1. In primo ergo exemplo. Eſto quævis circuli circumferentia ABC, cujus centrum ſit D; manifeſtum eſt ergo rectas omnes ab ipſa circumferentia ad centrum D ductas eſſe æquales. Itaque ex præmiſſa loci definitione, circumferentia illa locus eſt; quandoquidem ea magnitudo eſt ex qua deductæ quotcumque aliæ magnitudines, lineæ rectæ ſcilicet, ſecundùm eandem atque uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D tendant, eandem aliquam atque uniformem ſortiuntur proprietatem, ut ſcilicet omnes ſint inter ſe æquales.

Geometræ autem, cùm magnitudinem aliquam ad quendam locum referre volunt, primùm magnitudinis iſtius genus ac ſpeciem, deinde ejuſdem conditiones exprimunt, ac tandem locum ipſum enuntiant, addito modo quo ipſa magnitudo ad prædictum locum refertur.

In exemplo ergo præmiſſo ſic illi loquerentur. Si ab aliquo puncto educantur quotcunque rectæ, quæ uni eidemque rectæ ſint æquales, erit alterum cujuſvis eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

Tab.X. Fig. 2. In altero exemplo. Eſto quævis circumferentia circuli ABC, cujus diameter ſit AC, atque in ea diametro ſtatuatur punctum quodvis D, a quo erecta ad diametrum perpendicularis recta DB, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc BD media proportionalis inter diametri portiones AD, DC; unde ipſa circumferentia, rurſus alio reſpectu locus erit, quippe ad medias proportionales.

Phraſis geometrica hujus loci talis eſſet. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, ſi inter terminos illius ſumatur quodvis punctum, a quo

quo educatur ad rectos angulos ipsi rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis existat, erit alterum eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Esto adhuc quævis circumferentia circuli ABC, atque in ea recta quædam AC quæ subtendat acrum ABC utcunquè; atque in eo arcu, sumpto quovis puncto, B, ducantur rectæ BA, BC ad ejusdem arcus sive chordæ ipsius extrema: manifestum est angulum ABC æqualem esse omni alii angulo qui in eadem portione ABC existet. Manifestum est quoque potuisse super rectam AC constitui portionem circuli ABC, quæ cujuscunque anguli ABC capax esset; unde circuli portio ABC hoc respectu locus erit; quippe ad angulos æquales. TAB. X. Fig. 3.

Phrasis geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, & exposito quovis angulo rectilineo: si a rectæ lineæ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant: erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Esto ut suprà quivis circulus cujus diameter AB; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata AC, BC æqualia esse quadrato diametri AB, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eidemque quadrato semper æqualem. TAB. X. Fig. 4.

Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ AB etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta a centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E; vel extra, qualia sunt G, H; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ DF, EF; vel rectæ GI, HI; semper ambo quadrata DF, EF simul sumpta uni eidemque spatio erunt æqualia, nempe summæ amborum quadratorum DB, BE, vel summæ amborum EA,

 AD:

AD: similiter ambo quadrata GI, IH simul sumpta, uni eidemque spatio æqualia erunt, nempe summæ amborum quadratorum GB, BH, vel summæ amborum HA, AG. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo respectu, locus erit ad summam duorum quadratorum uni eidemque spatio semper æqualem.

Phrasis geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expositá, signatisque in ea utcunque duobus punctis, si ab ipsis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & sint species quæ ab ipsis fiunt simul sumptæ exposito alicui spatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt geometræ, non quadrata; ut indicent hoc universaliter verum esse, non de quadratis modò, sed etiam de figuris similibus, similiterque super rectis de quibus agitur descriptis. Quod enim de quadratis verum est, idem quoque de ejusmodi figuris verum esse omnino constat. Immo, si assumpta puncta in superiori quarto exemplo plura sint quàm duo, sive omnia in eadem recta existant, sive non, quicunque tandem sit illorum numerus, & quæcunque positio; atque ab iisdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, singulæ scilicet a singulis punctis, & omnium ipsarum rectarum species simul sumptæ alicui spatio sint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quispiam in cujus circumferentia sumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò posita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum species simul sumptæ eidem spatio æquales: quo quidem respectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantissimus jure censeri possit; sed illius, sicuti & aliorum discussio specialior, ad specialem de locis tractatum pertinet, nos autem hîc ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

Tab. X. Fig. 5. In quinto exemplo. Esto item circulus, cujus diameter AB, quæ producatur versùs A extra circulum utcunque in C; & ducatur recta CF tangens circulum in F, a quo demittatur in diametrum perpendicularis FD. Itaque erit ut CA ad AD, ita CB ad

ad B D. Jam in circumferentia ſumatur quodvis punctum E, vel G &c. a quo rectæ ducantur E C, E D, vel G C, G D &c. erit ſanè ſemper E C ad E D, vel G C ad G D, vel etiam F C ad F D &c. ut C A ad A D, vel ut C B ad B D; ut hoc reſpectu circumferentiæ A F E B G ſit locus nobiliſſimus ad binas & binas rectas in eadem ratione exiſtentes.

Phraſi geometricâ. Si a duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inclinentur C E, D E, in data ratione inæqualitatis exiſtentes: erit tertium illud punctum E ad cujuſdam circuli circumferentiam.

Omnino, quot proprietates habet magnitudo aliqua, modò proprietates ipſæ magnitudini conveniant, non autem punctis quibuſdam tantùm numero definitis: tot modis ipſa magnitudo locus eſſe poteſt; ita ut ſi infinitæ numero ſint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus eſſe poſſit. Sed & uniuſcujusque modi locus denominationem ſortietur a proprietate illa, reſpectu cujus ipſe locus eſt.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobiliſſimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus eſſe oſtenditur. At cùm innumeræ aliæ ſint ipſius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in ſuo genere eximia eſt, ſequitur ut innumeris etiam modis circumferentia circuli locus eſſe queat: at nos quid ſit locus geometricus indicare tantùm atque exemplis quibuſdam illuſtrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum inſtaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propoſitum eſt accedemus.

In ſexto ergo exemplo. Eſto parabola A B, cujus diameter ſit A C, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata ſit quævis recta B C, & latus rectum ponatur eſſe D. Notum eſt ergo ex conicis, quadratum rectæ B C æquale eſſe rectangulo contento ſub latere recto D, & ſub rectâ A C, quæ ex diametro inter verticem A & applicatam B C intercipitur, ſive diameter illa ſit axis, Tab. X. Fig. 6. 7.

ſive

five alia quæcunque. Itaque ordinatim applicata BC, quæcunque illa fit, media proportionalis eft intrer latus rectum D & portionem diametri AC. Ac proinde parabola quævis locus effe poteft ad medias proportionales, quarum altera extremarum fit femper eadem.

Phrafi geometricâ. Rectâ lineâ quacunque expofitâ AC quæ indefinita fit, atque fignato in ea quocunque puncto A; item aliâ rectâ quavis D, longitudine datâ, & dato angulo quocunque E, fi in priori recta fumatur quodcunque punctum C ad unas partes ipfius A, & educatur recta CB in angulo ACB qui æqualis fit angulo E, & punctum B fit femper ad unas partes rectæ AC, ipfa autem BC media fit proportionalis inter expofitam D & portionem AC: erit punctum B ad parabolam.

Quòd fi plures fint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putà BC, FG, inter quas a vertice A interceptæ fint portiones diametri AC, AG: erunt hæ portiones AC, AG, inter fe longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc eft, erit quadratum BC ad quadratum FG ut recta AC ad rectam AG; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod fatis ex dictis patet.

TAB. X. Fig. 8. In feptimo exemplo. Efto rurfus parabola BAC, cujus diameter AD, atque ad ipfam diametrum ordinatim applicata fit recta BDC; fumpto autem in ipfa parabola quovis puncto H, ducatur recta HE parallela diametro AD, occurrens ipfi BC in puncto E. Erit ergo ut recta AD ad rectam HE, ita rectangulum BDC ad rectangulum BEC. Similiter, fumpto in eadem parabola alio quovis puncto I, & ductâ rectâ IF parallelâ ipfi AD vel HE, erit quoque recta AD ad rectam IF, ut rectangulum BDC ad rectangulum BFC, & recta HE ad rectam IF erit, ut rectangulum BEC ad rectangulum BFC: atque ita de reliquis fimiliter ductis. Unde parabola erit locus ad rectas lineas rectangulis proportionales.

Phrafi geometricâ. Si expofitâ quacunque rectâ BC, fumptifque

que in ea quotcunque punctis D, E, F, &c. educantur ad easdem partes ipsius rectæ BC aliæ rectæ totidem terminatæ DA, EH, FI &c. atque omnes inter se parallelæ, sintque rationes eductarum eædem cum rationibus rectangulorum quæ sub portionibus rectæ primò expositæ continentur, quæ quidem portiones sumantur a singulis punctis eductarum usque ad extrema B, C, prout singula puncta singulis eductis respondent: erunt reliqua eductarum puncta extrema A, H, I, &c. ad parabolam.

Quòd si recta BC ordinatim applicata producatur in directum extra parabolam ex quacunque parte versùs B vel C quantùm quisquis voluerit usque in K, & ducatur recta KL prædictis AD, HE, IF, &c. parallela, quæ parabolæ etiam productæ occurrat in L, sed ad alteras partes ipsarum AD, HE, IF, &c. tunc quoque erit recta AD ad rectam KL ut rectangulum BDC ad rectangulum BKC, atque ita de reliquis.

Nec ideo phrasis geometrica a præcedenti diversa est, nisi in eo tantùm quod rectæ KL, AD, sunt ad diversas partes ipsius BC; quandoquidem sic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ AD, HE, IF, KL, &c. sint perpendiculares ipsi BC, vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo semper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In eadem figura ponatur recta AD esse axis parabolæ, ad quam ideo perpendicularis sit ordinatim applicata BC, existentibus angulis ADB, ADC rectis; sitque in axe AD producto, si opus sit, focus G, a quo ad puncta H, I, B, L, &c. quæcunque in parabola existunt, ducantur totidem rectæ GH, GI, GB, GL, & reflectantur aliæ rectæ HE, IF, LK ad quamvis ordinatim applicatam BC quantum satis productam, perpendiculares: tunc vero (eximia sanè parabolæ proprietas) quævis ducta GH cum sua reflexa HE, æqualis erit cuivis alii ductæ GI cum sua reflexa IF &c. Siquidem reflexæ ipsæ respectu ipsius BC, omnes sint ad partes verticis A, & summa cujusvis talis ductæ cum sua reflexa, putà summa

Q GHE,

GHE, æqualis erit ſummæ ambarum GAD, ſive uni rectæ GB quæ ſola ducta eſt, cui nulla convenit reflexa reſpectu ordinatæ BC. Quòd ſi ductæ quædam, ut GL &c. ſuas reflexas LK &c. habeant ad alteras partes verticis A reſpectu ordinatæ BC: tunc differentia inter ductam GL & reflexam LK æqualis eſt eidem GB. Erit ergo parabola locus ad quotcunque rectas ab eodem puncto ductas, atque a parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut ſumma vel differentia cujuſvis ductæ & ſuæ reflexæ æqualis ſit alicui datæ rectæ lineæ.

Phraſi geometricâ. Expoſitâ quacunque rectâ lineâ indeterminatâ BC, ſignatiſque in ea duobus punctis B, C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quadam longitudine datâ AD, exiſtente puncto D in ipſa BC; ſumpto etiam quocunque puncto G in eadem AD: ſi ductâ quâcunque rectâ GH ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum E inter puncta B, C, ſumma ambarum GHE æqualis ſit datæ alicui rectæ: vel ſi ductâ quâcunque rectâ GL ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum GL, LK, æqualis ſit datæ alicui rectæ, ei ſcilicet cui ſumma GHE æqualis eſt: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipſum punctum G erit focus; recta AD, axis; & recta AG erit quarta pars lateris recti.

Talis verò locus parabolicus ad ſpecula uſtoria pertinet. Nam ſi aſſumatur pars concava BAC, & radii ſolis ſint rectæ FI, EH, &c. qui ad ſenſum ſunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur a forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi ſi ſpeculum ſit ſatis amplum, & ſol in debita diſpoſitione, intenſiſſimus calor excitabitur. Hoc autem ideo fit, quia ſi per punctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ FI, GI, ad ipſam tangentem angulos æquales conſtituerent: eorum autem angulorum alter eſſet angulus incidentiæ, alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

Quod

Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii GH, GI, &c. post reflexionem a speculo fierent paralleli, putà HE, IF, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit AB, centrum C, vertices autem sint A & B, & foci D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum F, a quo ad focos ducantur rectæ DF, FE. Patet ergo ex conicis; in ellipsi summam ambarum DFE, in hyperbola autem, differentiam ipsarum DF, FE, axi AB æqualem esse. Unde hoc pacto ellipsis locus erit ad summam, hyperbola autem ad differentiam duarum rectarum a duobus certis punctis procedentium & ad idem tertium aliud quodpiam punctum inclinatarum. TAB. XI. Fig. 1. 2.

Phrasis geometrica, ad imitationem præmissarum, facilis est.

Decimo exemplo. In iisdem sectionibus noni exempli, esto I recta latus rectum suæ sectionis, & recta AB sit quæcunque diameter cui conveniat tale latus rectum, sive ipsa diameter sit axis, sive non, atque ad ipsam diametrum sint ordinatim applicatæ quotcunque rectæ GH, KL, &c. quarum puncta K, G sint in sectione, puncta autem L, H sint in diametro AB quæ in hyperbola producta sit indefinite. Ergo ex conicis, rectangulum ALB est ad quadratum LK, ut diameter AB ad latus rectum I; item rectangulum ALB est ad rectangulum AHB, ut quadratum LK ad quadratum HG: unde utraque sectio ad utramque talem proprietatem locus est.

Nec phrasis geometrica difficilis est, modò quis ea quæ superiùs exposita sunt imitari voluerit.

Si AB sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis: tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantùm, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, assymptoti illius erunt inter

Q 2 se

ſe ad angulos rectos, cùm in ratione inæqualitatis illæ aſſymptoti ſint ad angulos obliquos; ſed hæc omnia ex conicis manifeſta ſunt.

Tab. XI. Fig. 3. 4. 5. Undecimo exemplo. Eſto quæcunque ſectio conica, cujus axis AB, vertex A, & focus B; atque producto utrinque axe, ſumatur in eo ultra verticem punctum C, ita ut, in parabola quidem, recta AB æqualis ſit rectæ AC, in hyperbola verò ipſa AB major ſit quàm AC, in ea ſcilicet ratione quam habet diſtantia focorum ad longitudinem axis inter vertices ſectionum oppoſitarum intercepti; at in ellipſi, AB minor ſit quàm AC, in ea rurſus ratione quam habet diſtantia focorum ad axem ellipſis inter vertices interceptum.

Hæc autem utraque ratio eſt ea quam in figuris noni exempli habet recta DE ad rectam AB; tum ex C excitetur CD perpendiculariter ad CB, eademque CD indefinitè utrinque producatur. His poſitis, ſumantur in ſectione quotcunque puncta F, G, &c. a quibus ducantur totidem rectæ DF, EG, &c. ipſi BC parallelæ quæ occurrant rectæ CD in punctis D, E, &c. ac tandem jungantur rectæ BF, BG, &c. ac tunc erit ut BA ad AC, ita BF ad FD, vel BG ad GE, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum ſectionum locus eſt ad pulcherrimam illam proprietatem.

Phraſi geometrica. Expoſitis duabus rectis CB, CD ad angulum rectum conſtitutis, ſignato in altera illarum unico puncto B quod à puncto C diverſum ſit, in altera verò ſumantur quotcunque puncta D, E, &c. a quibus ductæ ſint rectæ FD, GE, &c. ipſi CB parallelæ, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & ſint rationes BF ad DF, BG ad EG, &c. omnes inter ſe eædem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque ſectione conica, cujus punctum B focus erit.

Hujus propoſitionis, in parabola quidem, unicus eſt caſus, quia

quia in ea unicus eſt focus, & vertex unicus; at in hyperbola atque in ellipſi, quia in utraque duplex eſt focus B, M, & vertex duplex A, H: ideo in unaquaque ex illis ſectionibus, quadruplex eſt caſus, duo quidem reſpectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo reſpectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem: At quoniam id quod de uno ex iſtis focis verum eſt, verum quoque eſt de altero ſimiliter conſiderato; ideo ad explicandos iſtos caſus ſufficiet, ſi unum focorum, putà B, aſſumpſerimus.

Ille ergo focus B neceſſariò propior eſt uni verticum quàm alteri. Eſto vertex propior H, remotior autem eſto A. Itaque, ſive puncta F, G. &c. ſint prope verticem remotiorem A, ſive eadem puncta F, G ſint prope verticem propiorem H, ſemper vera eſt propoſitio, nempe B F rectam eſſe ad rectam F D ſibi conterminam ad punctum F, ut recta B G ad rectam G E ſibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci poſſunt conſequentiæ quæ apud Apollonium in ſuis conicis non reperiuntur, nec tamen forſan illis cedunt quas ipſe habet ibidem, qualis eſt hæc. In hyperbola, ſumma ambarum B F, B F, ſupra diverſos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam F F axi A H parallelam pertinentium, ſe habet ad ipſam F F, ut recta B M, quam diſtantiam focorum eſſe ſupponimus, ad axem A H. In ellipſi, differentia earumdem B F, B F ad eandem F F, ſe habet ut diſtantia focorum B M ad axem A H; ac proinde in hyperbola, ſumma ipſarum B F, B F eſt ad ſummam B G, B G, ut recta F F ad rectam G G. In ellipſi, differentia ipſarum B F, B F eſt ad differentiam B G, B G, ut recta F F ad rectam G G; atque ita de multis aliis quas conſultò omittimus, quia id tantùm, quid ſit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibuſdam illuſtrare intendimus.

Illud tamen minimè prætereundum putamus quod ad Dioptricam pertinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem ſumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere,

atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis (hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit a priori. Et convertendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab ordine priori diversi: fiet necessariò ut tali superficiei talis conveniat proprietas, quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus, in ratione tamen inæqualitatis.

Hic vero in universum tres sunt casus. Primus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem fiunt adhuc paralleli, sed diverso a priori parallelismo; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet, nec admodum utilis est. Secundus casus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem ad idem punctum inclinantur; vel contrà, qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur, post fiunt paralleli; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam, quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis, non autem ad parabolam, cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est, cùm radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur, post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur; qui casus aliquando ad superficiem sphæricam pertinet, sed in aliquo tantùm casu admodum particulari, aliàs enim ac multò magis universaliter, ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodo autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam, aut, quod universalius est, ad superficiem sphæroïdis vel conoïdis hyperbolici, quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolà circa suos axes conversis gignuntur: non inutile erit hoc loco declarare. Posthac enim, sequenti exemplo, quomodo tertius casus ad alias superficies pertineat, aperiemus.

In

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli, sumpto in sectione quovis puncto F, quâ parte illa sectio magis distat a foco B, eademque vertici A propior est, & factâ constructione ut ibidem; producatur recta DF ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circumvoluta sectio, ut habeatur sphæroïdes, vel conoïdes hyperbolicum, ad cujus formam perficiatur perspicillum vitreum vel crystallinum, vel ex aliqua ejusmodi materia quæ aëre densior sit, & radios ab ipso aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quòd ad rarefactionem & condensationem spectat; sive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipsam materiam, eadem sit ei rationi quæ est inter rectas BA, AC; sive inter rectas AH, BM; conferendo semper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad densius: (quid sit autem ratio refractionis inter duo corpora diversæ densitatis, jamjam explicabimus) dico quod in tali perspicillo, si radius incidentiæ sit LF, qui axi AH parallelus est, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quòd si radius incidentiæ sit BF progrediens a puncto B, ille frangetur in F, & post fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, sicuti & in reflexione, progressus cujusvis radii, & regressus ejusdem, fiunt per easdem lineas: atque omnino quævis species visibilis eundo & redeundo idem servat iter. TAB. XI. Fig. 4. 5.

Quoniam ergo ponimus superficiem sphæroïdis vel conoïdis hyperbolici, exhibere nobis perspicillum ipsum à quo radii refringuntur in ingressu vel in egressu ejusdem superficiei; & superficies illa duplici modo accipi potest, primo quidem prout convexa est, ita ut convexitas pertineat ad corpus densius; secundo prout concava est, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus densius: sciendum est nos de priori modo jam locutos esse: quod si de secundo modo loquamur, contrarium accidet: nam si radius incidentiæ sit FF axi parallelus, atque ipse radius a parte foci remo-

remotioris B incidat in sectionem cujus vertex est A, is post refractionem in puncto F, fiet radius FI qui diverget tanquam si ab ipso foco remotiore B profectus sit, eritque in directum cum recta linea BF. Si autem radius incidentiæ sit IF, qui ad focum B inclinatur, is post refractionem fiet FF axi parallelus.

In his duobus modis manifestum est sphæroïdem a conoïde hyperbolico in eo differre, quod priori modo radius LF in conoïde sit intra densum corpus, & FB intra rarum; in sphæroïde autem, LF sit intra rarum & FB intra densum: at secundo modo, e contrario in conoïde radius LF sit in raro, & FB in denso; in sphæroïde autem, LF sit in denso, & FB in raro.

Jam quid sit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diversæ densitatis, putà inter aërem & vitrum, sic explicabimus.

Tab. X. Fig. 9. Esto AB superficies communis duorum corporum propositorum; sitque rarius, putà aër versùs partem superiorem C; densius autem, putà vitrum, sit versùs partem inferiorem E: & sumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quotcunque radii CD, CF, CP &c. cadentes in superficiem AB, in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, CD perpendicularis sit ad illam superficiem; cæteri autem obliqui, ita ut CF minùs obliquus sit quàm CP. Omnes ergo, præter CD frangentur in ingressu vitri; at CD solus rectà sine fractione transibit ad E. Jam cujusvis aliorum, putà ipsius CF, fractio sic se habebit. Centro F & intervallo FC describantur duo circuli quadrantes ACI quidem intra aërem, KG4 autem intra vitrum, ita ut recta IFK sit diameter ad superficiem AB perpendicularis, & quadrantes habeant angulos AFI, KF4 rectos, ad verticem oppositos; quo pacto illi jacebunt in eodem plano, eruntque sibi invicem oppositi. Producatur in directum recta CF intra vitrum usque ad circumferentiam quadrantis in G.

Si igitur radius CF fractus non esset in F, ille rectà progrede-

deretur in G; at propter fractionem fit contrà, ut deviet ab ipsa rectitudine CFG, fiatque CFH ex duabus rectis CF, FH angulum obtusum ad F constituentibus, sic ut intra aërem angulus inclinationis CFI major sit quàm angulus HFK qui est quoque angulus inclinationis intra vitrum; hic enim inclinationem radiorum mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpendiculari erecta a puncto incidentiæ, & hi anguli respectu ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producatur in directum recta HF ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque a quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam IFK totidem perpendiculares CM, YL, GO, HN, ex quibus duæ majores CM, GO inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores YL, HN inter se. Ratio ergo quam habet utravis majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio CM ad HN vel ad YL; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà HN ad CM vel ad GO, vocabitur ratio refractionis a vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis a rariori ad densius; minor autem, ratio refractionis a densiori ad rarius.

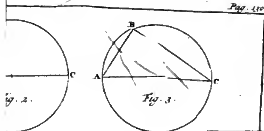
Et hæc quidem ratio respectu duorum eorumdem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum in superficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experientia comprobatur: neque enim hoc, cùm a corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experientia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

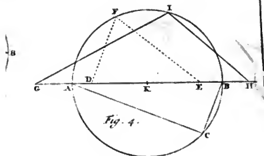
Sed esto in eandem superficiem AB alius radius CP priori CF obliquior; ac centro P, intervallo PC describantur ut priùs duo circuli quadrantes ςCS, TQB prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam SPT quæ ad planum AB perpendicularis existat; hic autem radius CP frangatur in P, &

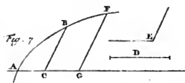
 post

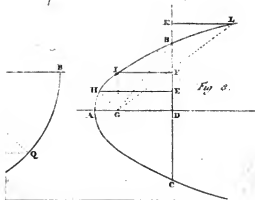
post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis CPS intra rarum major sit angulo inclinationis RPT intra densum; producatur quoque CP in directum in Q, & RP producatur in directum in V, sintque puncta ſ, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cujus diametrum SPT cadant quatuor perpendiculares CZ, QG, R 3, VX, quarum duæ majores CZ, QG sunt inter se æquales, sicuti & duæ minores R 3, VX inter se. Rursus ergo, ratio cujusvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, putà ratio CZ ad R 3 vel ad VX, est ratio refractionis a raro ad densum; & ratio cujusvis minoris ad quamvis majorem, est ratio refractionis a denso ad rarum, putà R 3 ad CZ vel ad QG; & hæ rationes eædem sunt cum præcedentibus CM ad HN, vel HN ad CM, &c.

TAB. XI. Fig. 4. 5. Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas sectiones ellipsim & hyperbolam sic accommodatur. Sumpto in quavis illarum sectionum puncto F, & facta constructione omnino ut suprà, ac posito quòd sectionis species talis sit ut ratio axis AH ad distantiam focorum BM, sit ratio refractionis a raro ad densum in ellipsi, & a denso ad rarum in hyperbola, inter duo corpora proposita aërem & vitrum; ducatur recta FR quæ sectionem tangat in F; tum recta FO ipsi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipsi sectioni, quæ quidem FO utrinque producatur indefinitè, sed hoc loco speciatim, ad partes concavas sectionum; deinde centro F & intervallo quocunque FO, describatur circuli quadrans cujus arcus secet rectam FL in K, & rectam BF in N; & a punctis K, N in rectam FO deducantur perpendiculares KQ, NP: demonstrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium KQ, NP rationem eandem esse cum ratione axis AH ad distantiam focorum BM, ac proinde esse rationem refractionis inter duo corpora proposita aërem & vitrum. Posito ergo quòd LF in ellipsi, in hyperbola autem KF sit radius incidentiæ, erit FB radius refractionis; & contrà, si BF sit radius incidentiæ, erit LF in ellipsi, & KF in hyperbola, radius refractionis. Cæ-


C
ig. 2.
B
A
C
Fig. 3.


B
F
I
G
A
D
K
E
B
H
C
Fig. 4.


B
F
Fig. 7
E
D
A
C
G


K
L
B
I
F
H
E
Fig. 8.
A
G
D
B
Q
C

Roberval.

Cætera quæ plurima ſunt, minutatim perſequi, Dioptricæ ſunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc oſtendendum reſtat, cur tale argumentum, quod manifeſtò ad Dioptricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo oſtendere voluimus, non ſolùm in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni poſſe, ſed etiam in aliis Matheſeos partibus quæ objectum ſuum a Phyſica mutuantur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod ſanè radiis ſpecierum viſibilium accidere ſatis ſuperque notum eſt. Idem autem in Mechanica locum habere facilè oſtenderetur; atque etiam in Aſtronomia; ſed iſtam ſegetem, quia ad hanc materiam directè non ſpectat, alio tempore metendam relinquamus.

Porrò, ſi quis phraſi dioptricâ uti voluerit in enuntiando ejuſmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perſpicilli alicujus ſuperficies, radios omnes parallelos in eam incidentes ſic refringat ut ad idem punctum inclinentur: vel ſi omnes radios ad idem punctum inclinatos, parallelos efficiat, talis ſuperficies erit ſuperficies ſphæroïdis, vel conoïdis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipſa ſuperficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipſius ſuperficiei erunt paralleli, ſed & axis ipſe, inter vertices interceptus, ad diſtantiam focorum eam rationem habebit quæ eſt ratio refractionis inter corpus, ex quo fit illud perſpicillum, & medium diaphanum per quod tranſeuntes radii in tale perſpicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Oſtendamus quomodo tertius ille caſus de quo undecimo exemplo locuti ſumus, & quem huc remiſimus, aliquando ad ſuperficiem ſphæricam, ſed multò magis univerſaliter ad alias ſuperficies pertineat, quas antiquis notas fuiſſe nullibi apparet.

Sunto ergo duo puncta A, B; & quæratur perſpicillum quod radios ad punctum A inclinatos ſic refringat, ut poſt refractionem iidem ad punctum B inclinentur. Et quidem jam monuimus per- TAB. XI. Fig. 6.

inde esse, sive radii ad punctum A convergant, sive ipsi radii a puncto A divergant, utroque enim modo, eosdem dici ad punctum A inclinari: quod idem de quocunque alio puncto B &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta sunt, vel quæ dicenda sunt, hærere possit.

Hinc ergo quadruplex casus particularis oriri potest. Vel enim radii ab uno punctorum A, B, divergentes, sic refringendi sunt ut post fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum A, B divergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum A, B, convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ad alterum convergant; vel denique radii ad unum punctorum A, B convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor casus differunt inter se perspicillis duplici modo inter se diversis. Priori modo, cùm perspicilla ipsa diversi sunt generis, quod ad formam sive figuram spectat; quemadmodum diversi sunt generis sphæroïdes, & conoïdes de quibus undecimo exemplo egimus. Posteriori modo, cùm talia perspicilla differunt tantùm secundùm convexum & concavum, prout scilicet hoc vel illud ad corpus densius pertinet, vel ad rarius.

Verùm, in universum, eorum omnium constructio non multo magis diversa est quàm constructio ellipsis a constructione hyperbolæ, quam suprà initio undecimi exempli ostendimus differre tantùm secundum rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejusmodi constructione, ut appareat ipsam ad quosdam eosque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram describere, quâ circa rectam AB circumvolutâ, gignatur forma ad perspicillum apta, ita ut radii a puncto A divergentes, quotquot in perspicillum ipsum inciderint, refringantur ad punctum B. Ex duo-

duobus autem mediis diaphanis per quæ radii sive species transibunt, alterum, idemque rarius sit aër; alterum autem, idemque densius esto vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data sit.

Ducatur recta A B, quæ indefinitè producatur ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, sumatur quodvis punctum C in recta A B, quod punctum C futurum sit vertex figuræ planæ quæsitæ, quæ ad ovalem formam apprime accedet, caret tamen adhuc speciali nomine, propterea quòd ipsa geometris hucusque ignota fuisse apparet. Nec multùm refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior sit; hoc enim liberum est, quamquam ad praxim utilior futurus sit, si ad punctum A magis accedat. Posito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E a puncto A remotior erit, immo ultra punctum B in recta A B producta; neque ex arbitrio pendebit illud punctum E, sed illius positio ex prædeterminatis sic habebitur. Fiat ut summa terminorum (id est antecedentis & consequentis simul) eorum inter quos ratio refractionis consistit, ad eorumdem differentiam, ita recta C B ad B E, & habebitur secundus vertex quæsitus E; fietque ut si ex C B secetur C D æqualis ipsi B E, tum recta C E quæ axis erit futuræ ovalis, sit ad rectam B D in ratione refractionis a raro ad densum; fiat quoque B E ad E F in eadem sed inversa ratione nempe ut B D ad C E; & ut C E ad B D, ita A F ad B G; sed punctum F sit in recta A E producta ultra E; punctum autem G e contrario sit prope A. Tum centro A intervallo A F describatur circulus FH, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo B G alius circulus integer G M L N O, quem tangat recta A L in puncto L, a quo ducatur diameter L B O quæ angulum A L B rectum constituet; ducatur quoque recta B H ipsi A L parallela, sive ad L B perpendicularis, ita ut anguli recti A L B, L B H sint alternatim oppositi, & recta B H occurrat circumferentiæ F H in puncto H, & jungatur recta A H secans B L in pun-

cto V hæc AH determinabit portionem circuli FH quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem AH tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio BV ad VH erit ratio refractionis ut BE ad EF, sicuti & LV ad VA. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu FH quocunque puncto I, ducatur recta AI, in qua tale reperiatur punctum X, ut ductâ rectâ BX, ratio hujus BX ad XI sit ratio refractionis ut BE ad EF, sive ut BV ad VH; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta AI aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta BY, erit quoque BY ad YI in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta AI ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu FH assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quotcunque punctis, per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ lineæ curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porro, ex tali constructione methodus non inelegans deduci potest quâ ipsa ovalis motu aliquo continuo describeretur, nec machina ad talem descriptionem requisita, quamquam satis composita, admodum difficilis esset, nec unico modo perficeretur, immo forsan innumeris: at vero hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hîc agimus.

Patet ergo talem ovalem locum esse ad rectas in ratione data existentes; siquidem BE ad EF, BX ad XI, BY ad YI, BV ad VH, &c. sunt semper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis a denso ad rarum.

At phrasi geometricâ sic loquemur. Expositâ quâcunque rectâ AB indefinitâ, signatisque in ea duobus punctis A, B, ac descripto centro A & intervallo AF majori quàm AB, circulo FIH, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ AI quæ sic

secetur

fecetur in X, ut ratio rectæ BX ad XI data fit, sed minoris inæqualitatis: erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile esse poterit.

Quomodò autem, & quando ejusmodi ovalis Dioptricæ inserviet, sic declarabimus. Ad hoc sanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima est, ut ratio data BX ad XI sit ratio refractionis a denso ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus sive species visibilis transire debet. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, semidiameter AF non sit cujuscunque longitudinus, sed illa major quidem sit quàm AB, at minor quàm ea recta ad quam AB habet rationem refractionis a denso ad rarum, quam habet BE ad EF; ut sic postquam factum fuerit ut FE ad EB, ita FA ad BG, ipsa BG minor sit quàm AB; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, describeretur quidem aliqua linea curva, sed quæ ad Dioptricam inutilis esset: cùm autem aderunt illæ conditiones, tunc usus illius in Dioptrica talis erit.

Duæ quidem sunt partes ejusmodi curvæ. Prior ac præcipua est ea quæ existit circa verticem C usque ad duo puncta contactus V, 7; posterior est reliqua circa alterum verticem E usque ad eosdem contactus: sed hæc posterior pars inutilis est, prior verò facit ut existente corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, puta aer qui vitrum ambiat; radii omnes a puncto A procedentes, atque in superficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque e contrario, radii omnes a puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes refringantur præcise in A: qua ratione primo casui particulari ex quatuor præmissis factum est satis. Sic, si radius incidentiæ in raro sit AY, radius refractionis in denso erit YB; atque e contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro YA.

Quòd

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore sive vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra densum dirigebantur versùs punctum B, incidùntque in superficiem VC7, sic restringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam si a puncto A progrediantur. Atque e contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant incidùntque in eandem superficiem, sic refringuntur intra densum, ut divergant tamquam si a puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ existente LV, MZ, fiet radius refractionis VH, Z5; & e contrario, existente radio incidentiæ HV, 5Z, fiet radius refractionis VL, ZM; hoc autem pacto satisfecimus quarto ex quatuor casibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, describi potest ejusmodi ovalis per puncta, beneficio circuli GMLNO superiùs descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter LBO, in qua producta si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta AV sit ad VL in ratione refractionis, sed a raro addensum; (in priori constructione, BX ad XI habebat eandem rationem, sed inversam, quippe a denso ad rarum) sic enim rursus punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro LBO producta si opus sit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A4 sit ad 4O in eadem ratione refractionis a raro ad densum ut AV ad VL, sive ut FE ad EB, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ a diametro LBO, puta MB12, &c. habebuntur simili constructione in unaquaque duo puncta, puta Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodum difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursus ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali sit locorum geometricorum seges; nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter ele-

elegantiſſimos annumerari poſſint & debeant. Lubet ergo ex amplissima illa meſſe ſpicas aliquas ſelectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre poſſint.

In prima ergo conſtructione diximus BX eſſe ad XI in ratione refractionis a denſo ad rarum. Quòd ſi ergo, ductâ utcunque ſemidiametro AI, quæratur in ea punctum X quod ad ovalem eſſe debet: manifeſtum eſt in triangulo BXI (intellige ductam eſſe rectam BI) dari baſim BI, angulum I, & rationem laterum BX, XI. Quia etiam infinitæ ſunt ſemidiametri, putà A 35, AH, &c. manifeſtum eſt quoque infinita eſſe talia triangula B 10 35, BVH, &c. in quibus omnibus baſis data eſt unà cum angulis qui ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ ſemper eſt ratio refractionis a denſo ad rarum. Jam ergo eò deducta eſt quæſtio, ut omnium illorum triangulorum inveniantur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare eſt: at in praxi propoſita, ſi conſtructio illius toties repetenda eſſet quot ſunt triangula, ſive quot ſunt invenienda puncta per quæ ovalis ducenda ſit, id ſanè & tædioſum eſſet, & errori valde obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurret geometria, exhibendo nobis locos quoſdam, nempe circulorum circumferentias quæ breviſſimo compendio dabunt puncta quæſita. Sed quoniam loci illi ex vulgari conſtructione problematis deducuntur, operæ prætium erit ipſam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmiſſi, hoc modo.

Propoſitâ baſi BI cujuſvis ex triangulis, putà BXI, cujus vertex X inveniendus ſit; ſecetur ipſa BI in T, ita ut IT ad TB ſit quemadmodum FE ad EB, hoc eſt in ratione refractionis, ita tamen ut BT ſit minor terminus, quandoquidem latus BX debet eſſe minus quàm XI, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ IB ultra B uſque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, ſeceturque bifariam recta T 42 in Q; ac centro Q, intervallo autem QT, vel Q 42, deſcribatur circulus TXY 42, qui ſecabit rectam AI, dabitque in ea punctum X quæſitum: ſed & idem circulus dabit in eadem AI

S pun-

punctum Y : erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum BXI, BYI, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem BX ad XI, ita BY ad YI, & utraque ratio est ut BE ad EF, sive ut BT ad TI.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, BH &c. fiat similis constructio ; habebuntur hâc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale est centrum Q, & duo intervalla qualia sunt QT, Q42, ad describendos tot circulos quot sunt bases datæ, sive quot sunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri possit, omnia illa centra existunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis est RQK, quæ secat bifariam axem EC in K ; & centrum illius P existit in eodem axe producto ultra E, sic ut ratio FB ad BK eadem sit cum ratione semidiametri AF ad semidiametrum KP : unde respectu duorum circulorum FH, RK, quorum centra sunt A, P, punctum B ad utrumque ex istis circulis est similiter positum : ita ut si per punctum illud B ducatur recta quæcunque IBQ, arcus IF, QK, qui ad ipsos circulos pertinent, sint similes, ut si unus illorum sit 30. grad. exempli gratia, erit & alter 30. grad. Similiter si ducatur alia recta HBR, erunt arcus HF, RK similes, & punctum R erit centrum respectu basis BH, ad inveniendum verticem V trianguli BVH in recta AH ; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta AH hoc speciale est (quia ipsa tangit ovalem) quòd circulus centro R descriptus, exhibeat in ipsa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipsam AH, non autem secat, sicuti secant suas rectas reliqui circuli quorum centra sunt in arcu RK, a puncto R ad K.

Manifestum est ergo circumferentiam RQK centro P descriptam, esse locum ad centra infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum : hæc ergo circunferentia dicatur primus centrorum locus ; dabitur enim

enim alius, ut infrà patebit; dicetur etiam aliquando circulus RQK primus centrorum circulus.

Præterea, ficuti in bafi BI inventum eft fupra punctum T; fic in unaquaque alia bafi putà B 35, BH &c. reperiri poteft punctum ipfi T analogum: erunt ergo infinita talia puncta, ficuti numero infinitæ funt tales bafes: at illa omnia exiftunt in una eademque circuli circumferentia ET 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in rectâ EA inter B & A; eritque ut FB ad BE, ita femidiameter FA ad femidiametrum E 13: quo pacto rurfus punctum B ad utrumque circulum FIH, ET8, fimiliter pofitum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum X verticem trianguli BXI ufi fumus intervallo QT a centro Q ad punctum T in bafi BI; fic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 r a centro 44, in circulo RQK, ad punctum r, in circulo ET8.

Patet igitur circumferentiam ET8 centro 13 defcriptam, effe locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim ftatim alius, dicetur etiam aliquando circulus ET 24 8, primus intervallorum circulus.

Rurfus, quemadmodum in eadem bafi BI productâ ultra B, inventum eft punctum 42; fic in unaquaque alia bafi reperietur punctum ipfi 42. analogum: ac infinita illa puncta exiftunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipfius circumferentiæ erit 27 in axe CE producto ultra E; fed in hac figura centrum illud 27 nimis remotum effet a reliquis, unde non potuit in ea fignari: atque ut fuprà, punctum B refpectu hujus circuli, fimiliter pofitum eft ut refpectu circuli FIH; quia ut recta FB ad rectam BC, ita eft femidiameter AF ad femidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æqua-

le intervallo QT, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 r, & ſic de reliquis; dicetur idem, ſecundus intervallorum circulus; & circumferentia illius, ſecundus intervallorum locus.

Huc uſque ergo habemus quatuor circulos, quorum reſpectu punctum B ſimiliter poſitum reperitur, nempe FIH qui primus omnium eſt; KQR qui primus eſt centrorum circulus; ET8 qui primus eſt intervallorum circulus; & C 42 46 qui intervallorum ſecundus eſt. Atque etiamſi punctum B nullius ex ipſis quatuor circulis centrum exiſtat; tamen quia ipſum in unoquoque ſimiliter poſitum eſt, fit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos ſecat, abſcindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus ſimiles ad axem CE productum utrinque ſi opus fuerit, terminatos. Sic recta ITBQ 42 abſcindit quatuor arcus IF, TE, QK, & 42 C omnes inter ſe ſimiles, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex iſtis circulis centrum P ſit ad unas partes puncti communis B; in alio vero centrum 13 ſit ad alteras; nulla alia eſt cauſa quàm quòd vertices ipſorum circulorum ſunt ad diverſas partes ejuſdem puncti B: ſed minima quæque perſequi in exemplis, non vacat: hæc enim facilè ſupplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas noſtræ ovalis conſtructiones per puncta, quarum prior utebatur circulo FIH ad determinandas triangulorum baſes BI, BH, &c. Poſterior verò utebatur circulo GMLNO ad determinandas aliorum triangulorum baſes, putà baſim AM trianguli AZM; baſim AL trianguli AVL; baſim AO trianguli A4O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum FIH dici poteſt primus baſium locus; & circulus dicetur primus baſium circulus.

Eodem jure circumferentia poſterioris circuli GMLNO dicetur ſecundus baſium locus; & circulus, ſecundus baſium circulus.

Quæ-

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & secundo intervallorum, referuntur omnia ad primam constructionem; sicuti & primus basium locus. At si ad secundam constructionem respiciamus, ad quam pertinet secundus basium locus G M L N O; tunc respectu illius constructionis dabitur secundus centorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus T E 24 8 secat axem E C productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam AL in puncto 17; sicuti ex constructione secundus basium locus eandem A L tangit in L; secetur bifariam recta C8 in puncto 9; tum centro P (hoc enim commune est centrum tam primi quàm secundi centrorum circuli) intervallo autem P9, describatur circulus 9 18, qui eandem rectam A L productam ultra L tanget in 18; hic ergo erit secundus centrorum circulus, & circunferentia illius erit quoque secundus centrorum locus; quomodo autem centra secundæ constructionis in tali loco accipiantur, postea declarabimus. Sed & secundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam A L supra punctum 18 in puncto 19; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis est rectæ 9 C.

Quod autem tres circuli, nempe secundus centrorum, & ambo intervallorum, tangant rectam eandem A L productam quantùm satis, id vi geometriæ deducitur ex constructione illorum, atque ex eo quod secundus basium circulus eandem tangat ex constructione; sed demonstratio, ut elegantissima est, ita & longissima: nos ergo ipsam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, secundus basium, secundus centrorum, & ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra sua in eadem recta A B producta quantum satis; atque huic rectæ A B occurrit ipsa tangens A L in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circulorum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantiæ a puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C,

 semi-

Simili modo, si in secundo basium circulo, ducatur diameter MB 12; huic convenient duæ bases, AM, & A 12, pro triangulis AZM, A 11 12; (finge triangula illa esse absoluta, quod vitandæ confusionis gratiâ hîc factum non est) ac unaquæque ex illis basibus secabit tam secundum locum centrorum, quàm utrumque intervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque semidiametro BM, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæsitum.

In hac verò secunda constructione unicum centrum, putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem de omnibus aliis verum est; cùm e contrario, in prima constructione unicum centrum Q dederit duo puncta X & Y.

Neque verò prætereundum est quomodo talium locorum beneficio, & centra & intervalla, ac denique puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur. Quod sanè in prima ex duabus præmissis constructionibus præstitisse sufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem methodus ad secundam constructionem accommodari possit, illico patebit. Quæcunque autem circa tale argumentum dicturi sumus, praxim respiciunt, quæ hoc modo expeditissima, & certissima reddi potest.

Descriptis ergo secundùm præscriptas leges sex circulis sive sex locis ut suprà, duobus quidem basium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: assumatur in primo loco basium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore suprà notatum est) & jungatur recta AI, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui FI sumantur duo alii arcus similes, alter KQ in primo centrorum loco, alter ET in primo loco intervallorum: ac sumpto intervallo QT, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta AI, ut propositum est.

Verùm, inquiet aliquis, possuntne promptè ac expeditè haberi arcus similes in diversis iisque inæqualibus circulis? Possunt sanè, nec uno modo; sed hic omnium facillimus jure videri possit.

Duc

Duc quamcunque basim BH (extrema ad extremum punctum H pertinens, in hac prima constructione, reliquis præstat, in secunda constructione, nihil refert) quæ producta quantùm satis, dabit in primo loco centrorum arcum KR; ac in primo intervallorum, arcum ES, qui inter se, & ipsi FH similes erunt. Dividantur omnes illi tres arcus singuli in quotcunque partes æquales, ita tamen ut partes unius sint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unusquisque primùm bifariam, deinde quælibet pars rursus bifariam, atque ita continuè quantùm quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus FH terminabunt semidiametros AI, AH, &c. Puncta autem prædictis ordine correspondentia in arcu KR, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine sumpta in arcu ES, terminabunt intervalla. Cætera sunt facilia, nec est cur in iis immoremur.

Expeditis ut suprà, quæ ad primum & quartum ex casibus particularibus refractionum pertinebant, superest nunc ut reliquis duobus, secundo scilicet & tertio, satisfaciamus: nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis casibus inserviat. Sed antequam ad rem ipsam veniamus, lubet hic aliquantisper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ præcedentis, duo nempe focorum A, B; & duo verticum C, E: ex tali enim consideratione magis elucescet analogia quæ inter casus jam expeditos, & eos de quibus agendum superest, intercedit; quæ quidem analogia ad eorumdem casuum figuras extenditur, habetque aliquid simile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipsim.

Statuamus primùm ex illis quatuor punctis, duo B, & C, esse immobilia, eademque remanere in eo statu in quo hucusque constituta sunt: at punctum A (quod primum ac præcipuum est) mobile esse, idemque diversas positiones successivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E eatenus mobile esse, quatenus necessitas geometrica id exiget: existant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea AB, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producatur. Ergo,

Ergo, respectu puncti B, vel ipsum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et siquidem illud sit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in hac figura; sed ita ut ab ipso puncto C longissimè, immo infinitè distare possit. Rursus, si respectu puncti B, punctum A sit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, sic ut ab ipso puncto E longissimè, immo infinitè distare possit. Tandemque illud idem punctum A considerari potest tanquam si puncto B congruat, ita ut ambo simul unicum punctum efficiant.

I. Status. Incipiamus ab hoc ultimo statu quo punctum A puncto B congruit: tunc verò loco ovalis CVE7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter BC, cui æqualis erit BE; unde punctum E vi geometricâ, tantùm distat a puncto B quantùm C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundùm præscriptas leges in præcedenti constructione: ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circunferentia ejusdem circuli CVE7 qui loco ovalis succedet: tandemque ipsa eadem circuli CVE7 circunferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Dioptricam erunt planè inutilia.

II. Status. Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C: ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B; attamen distantia BE minor erit quàm BC; atque ita excessus rectæ AE supra rectam AC major erit quàm excessus rectæ BC supra rectam BE; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in hac ipsa figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est, quia hæc omnia ut priùs, ad Dioptricam sunt inutilia.

III. Status. Esto jam punctum A in præcipuo vertice C: quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima: siquidem, dum focus A procedit a B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, a quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis CE ad excessum quo recta BC superat rectam BE, est ipsa ratio refractionis. Primus locus basium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in superiori constructione factum est, inter quos ille qui primus est intervallorum transit etiam per C vel A; quo pacto idem cùm transeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius est in medio axis ejusdem in K. Secundus locus basium, secundus centrorum, & secundus intervallorum omnes transeunt per idem punctum C vel A, sed centris differunt: illa tamen, quia hæc ovalis ad Dioptricam nihil confert, relinquenda judicavimus.

IV. Status. Existat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè: tunc autem omnia se habebunt prorsus ut in præmissa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ AB ad rectam BC, eò magis ovalis ipsa ad figuram veræ ellipsis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipsis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis est, ut in descriptione figuræ notavimus.

V. Status. Abeat nunc punctum A in infinitum ultra C, qui status nobilissimus est, præbet enim veram ellipsim conicam, ac prorsus eam quæ undecimo exemplo exposita est, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cùm scilicet ratio axis AH ad distantiam focorum BM est ipsa ratio refractionis. Hic verò omnes sex loci basium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: sed ex illis, secundus basium, & secundus centrorum infinitè distant à præcipuo vertice, qui in figura ejusdem exempli

pli (tab. 11. fig. 4.) erit A; reliqui quatuor transeunt per puncta quæ ibidem sunt C, H, A, & centrum ellipsis, suntque illi omnes quatuor ad axem ejusdem ellipsis perpendiculares. Quoniam autem a puncto illo qui præcipuus vertex est & infinitè distat, duci debent rectæ, sciendum est ipsas duci debere axi ellipsis parallelas. Cætera facilè intelligentur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geomettia assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omnino accidet quod jamjam diximus, cùm idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolutè impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque latuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenus illa ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere focos, duos scilicet internos, & unum externum qui infinitè distet a quovis ex duobus verticibus. Unum dicimus externum, non duos, etiamsi cuivis doctrinæ infiniti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè a se invicem distantes videri possint. Ille enim quamdiu in distantia finita a foco B distitit, ut suprà, unicus fuit A; postquam autem abiit in infinitum versùs C, idem eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa parte versùs E secundùm rectam lineam NFEB, usque ad B unde moveri cœperat: immo, sive versùs E, sive versùs C infinitè distare ipse intelligatur, perinde est, quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim recta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper existet parallela.

Superest nunc ut ipsum focum A consideremus ab infinita distantia versùs E regredientem usque ad B secundùm rectam NFEB, hic enim status dabit locos illos qui duobus reliquis particularibus casibus refractionum satisfacient. De his agemus postea, sed priùs operæpretium fuerit statuere puncta A & C

 fixa,

fixa, B verò mobile ad arbitrium; at E rursus eatenus mobile tantum, quatenus vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quàm præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cùm scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa a se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundùm distantiam finitam, vel infinitam.

VI. Status. Si tria puncta A, B, C, simul existant, tum quartum E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsus inutilis.

VII. Status. Si puncta A, C, simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantiâ, habebimus tertium statum ex iis qui suprà expositi sunt, cùm punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur.

VIII. Status. Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab utroque infinitè distet ex utravis parte, (proinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprà,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi AC, ita ut recta AB angulum ab illis contentum bifariam dividat; eritque ille angulus tantus quantus debetur assymptotis hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est, posito quòd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam AB perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unicam coalescunt rectam quæ per punctum commune AC transit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia.

Jam puncta A, C, quâcunque distantiâ finitâ a se invicem distent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultrà usque in infinitum.

Exi-

Existente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum A C. Et hic status suprà expositus est, fuitque primus. *IX. Status.*

Existente autem ipso puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur status inter se diversi, de quibus agemus postea; illi enim sunt qui reliquis duobus casibus particularibus refractionum satisfaciunt. *X. Status.*

Existente jam ipso B in C, evanescet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coalescet; quod jam suprà notatum est, atque inter inutilia repositum: is status sextus fuit. *XI. Status.*

Existente deinde puncto B ultra C, ita ut C sit inter duo B, A, habebimus statum hujus figuræ in qua tamdiu immorati sumus: & idem status suprà fuit quartus. *XII. Status.*

Existente porrò puncto B ultra C vel ultra A in distantia infinita ex quacunque parte (perinde enim est, ut jam non semel notavimus) tunc statum nobilissimum habebimus: abibit enim ovalis nostra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum est, cùm scilicet ratio axis ad focorum distantiam est ipsa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, respectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinitè productum perpendiculares; sed ex iis duo primi infinitè distant versùs C, nempe primus basium, & primus centrorum; primus intervallorum transit per verticem hyperbolæ inutilis, secundus intervallorum transit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum transit per centrum hyperbolarum; secundus autem basium transit per illud punctum in quo recta A C sic dividitur, ut tota A C ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis a raro ad densum. *XIII. Status.*

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipsi suprà dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe,

præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique diſtantiâ finitâ a centro ultra vertices removentur, dari tertium qui ex utravis parte infinitè diſtet ab eodem centro quatenus ſcilicet ipſa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut ſuprà de ellipſi.

XIV. Status. Tandem verò punctum mobile B ab infinita diſtantia ultra A regrediatur versùs ipſum A a quo moveri incepit, ita ut idem A exiſtat inter C & B; ac tunc habebimus ſecundum ſtatum illum inutilem de quo dictum eſt dum punctum A mobile ſtatuebatur, atque illud exiſtebat intra ovalem inter B & C; nec eſt quod hic ultrà addamus.

Quòd ſi quærat aliquis quinam hujuſce ſpeculationis circa mobilia puncta fructus futurus ſit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc noſtra exempla: ſciat ille primùm quidem in univerſum, tali, vel aliâ ſimili conſideratione apprime detegi naturam figurarum omnium; cùm ſcilicet ritè notaverimus qui ex diverſo ſitu præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eiſdem figuris accidere poſſit, unde illæ immutari queant.

At in ſpecie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi poſſe quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut ſpecie, diverſas permutentur; quemadmodum ſuprà vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc eſſe ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipſim, aut etiam hyperbolam: quod adhuc in iis quæ ſtatim dicturi ſumus, non minùs evidenter apparebit.

XV. Status. Præteriimus ſuprà eum ſtatum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, ſed ad contrarias partes uſque in infinitam diſtantiam, quia ſtatus ille ad Dioptricam inutilis eſt: quamdiu enim ipſum exiſtit in diſtantia finita, habetur ſecundus ſtatus in quo A ſtatuitur inter B & C, de quo ſuprà; cùm autem idem exiſtit in diſtantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus eſt A, vertex autem inter A & C; ac illud C eſt vertex hyperbolæ oppoſitæ, quæ ſanè oppoſita poterit eſſe utilis, ſed illa eadem prorſus erit cum ea de qua duodecimo ſtatu locuti ſumus. Ni-

Nihil etiam diximus de puncto C infinitè distante, quia tunc evanescit omnis figura, atque unà eum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinitè distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinitè distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B, medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui inservit figura nostra; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisfacient. Nec multùm in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis analoga, scilicet focos, vertices, & locos basium, centrorum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo status ex illis septem reliquis esto ille in quo duo puncta B & E media sunt inter focos C, A; ac vertex secundus E medius quoque est inter B & A; cui statui inservit figura 1. tab. 12.: in qua quatuor puncta C, B, E, D, se habent prorsus ut antea; ita scilicet ut rectæ CD, BE, sint æquales; sicuti & CB, DE; sitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis a raro ad densum. At quia præmissæ conditiones omnes non solùm huic statui, sed etiam tribus sequentibus conveniunt, ideo huic primo illud peculiare esto, quòd ratio rectæ AE ad rectam EB sit major ipsâ ratione refractionis a raro ad densum. In secundo autem statu ponetur hæc ratio AE ad EB esse præcisè ratio refractionis a raro ad densum. In tertio e contrario, ponetur AE esse ad EB in ratione minori quàm sit ratio refractionis a raro ad densum, non minori tamen quàm a denso ad rarum. In quar-

TAB. XII. Fig. 1.

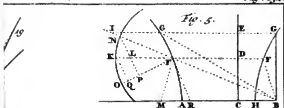
quarto, ponetur ratio AE ad EB esse minor ratione refractionis a denso ad rarum, quousque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A esse in E. In sexto, ponetur idem A esse inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major sit quàm ratio refractionis a raro ad densum. In septimo denique statu, ponetur ipsum A rursus intra ovalem inter B & E, sed propiùs ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major sit ratione refractionis a raro ad densum, sed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.

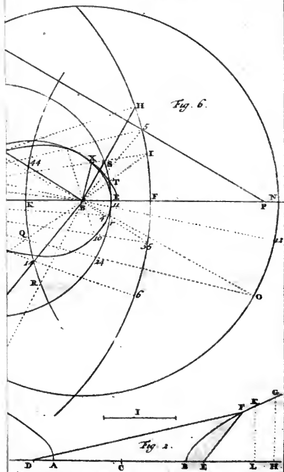
Etsi verò figuræ omnes, quæ singulis ex istis casibus propriæ sunt, differant tam inter se, quàm ab ea quam primam supra exposuimus; ipsæ tamen plurima habent inter se similia: immo illæ omnes sic delineari ac notis distingui possunt, ut una eademque explicatio omnibus inserviat, nec alia distinctio adhibenda sit, quàm circa positionem aliquot punctorum, quorum quæ in una figura priora fuere, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omnino quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi fig. 6. tab. 11. usque adeo quadret, ut soli illi propria esse appareat, & revera soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen paucis tantum mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac figura clare intueri licet: sed ad hoc monendus est lector ut quotiescunque in dicta aliqua inciderit quæ huic figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

Ac primùm, in hac figura 1. tab. 12., quia punctum A est ultrà tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est figuræ tab. 11, fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cum in alia esset versùs C.

Secundò, anguli recti ALB, LBH, in hac figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum AL, BH, qui tamen in præcedenti erant alterni.

Tertio,


Fig. 5.
I
G
E
G
N
K
L
D
F
F
P
O
Q
M
A
R
C
H
B


Fig. 6.
H
5
I
X
S
T
F
N
P
K
B
Q
R
O
6
Fig. 2.
I
D
A
C
B
E
L
H
F
K
G

Roberval.

Tertiò, in hac figura, intervallum AF minus eſt quàm AB, quod in præcedenti majus erat.

Quartò, cujuſcunque longitudinis reperiatur intervallum AF in hac figura, ſemper ovalis utilis erit; quod in præcedenti verum non erat.

Quintò, hæc figura ſatisfacit ſecundo & tertio caſui ex quatuor illis particularibus caſibus refractionum ad perſpicilla pertinentium qui ſuprà expoſiti ſunt, cum præcedens ſatisfaceret primo & quarto, ut dictum eſt. Nam in hac eadem, poſito corpore denſo diaphano ab ipſa ovali comprehenſo, atque ad formam illius perpolito, putà vitro, cui alterum corpus rarius undique contiguum ſit, putà aër qui vitrum ambiat: radii omnes ad punctum A tendentes, atque in ſuperficiem V C 7 incidentes, refringuntur præcisè in punctum B; hic vero eſt tertius ex iiſdem quatuor caſibus. Atque e contrario, radii omnes a puncto B procedentes, atque in eandem ſuperficiem V C 7 incidentes, poſt refractionem divergunt extra ovalem tanquam ſi omnes ex puncto A progreſſi ſint: & hic eſt ſecundus caſus. Sic, ſi radius incidentiæ in raro ſit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denſo erit Y B: atque e contrario, ſi radius incidentiæ in denſo ſit B Y, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quod ſi corpora permutentur, ut rarius ſive aër contineatur ſub forma ovali propoſita, denſiore ſeu vitro ipſum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt a puncto A, incidùntque in ſuperficiem V C 7, ſic refringuntur, ut intra denſum divergant tanquam ſi a puncto B progreſſi ſint. Atque e contrario, radii omnes in denſo ad punctum B convergentes, atque in eandem ſuperficiem V C 7 incidentes, ſic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ exiſtente A Z intra rarum, fiet in denſo radius refractionis Z 32 qui a puncto B procedit; & e contrario, exiſtente intra denſum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis Z A. Quo pacto rurſus alio modo ſatisfactum eſt ſecundo

V

cundo ac tertio ex prædictis quatuor casibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum sex quos suprà assignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & basium, multo aliter in hac figura, quam in præcedenti, disposita sunt. Nam in hac figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertices C, E, quod tamen in præcedenti figura erat ultrà. Item, in eadem hac figura, centrum 27. quod ad secundum locum intervallorum pertinet, abit ultra verticem C, quod tamen in præcedenti abibat ultra E.

Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum: fit ut tam ambæ rectæ quæ a puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium G L N O, quàm ambæ quæ a puncto B procedentes, tangunt primum locum basium F I H: tam hæ tangentes, inquam, quam illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum E T 24 8, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantùm satis producantur.

Cæteras differentias quivis facilè percipiet: ideo nos ultrà progrediemur.

Assignavimus suprà differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc a cæteris distingui, quòd in eo ratio A E exterioris ad B E interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis a raro ad densum. Huic autem statui omnino accommodata est hæc nostra figura, in qua ideo primus locus intervallorum E T 24 8 totus extra ovalem existit versùs A, & punctum F inter duo A & E constituitur.

TAB. XII. Fig. 2. Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio A E ad E B est ipsa ratio refractionis a raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt.

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsus modò quo utilis est præmissâ ovalis fig. 1. tab. 12., putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus

tactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tertio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus fig. 1. tab. 12. a 6. tab. 11. discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali fig. 1., quam circulo fig. 2. tab. 12. in qua, etiamsi puncta B, C, D, E eodem prorsus modo disposita sint quo in fig. 1., tamen, propter rationem refractionum a raro ad densum quæ intercedit inter rectas AE, EB, fit ut sex loci de quibus toties suprà dictum est, singuli amissâ suâ extensione seu magnitudine, in puncta coalueriat; primus scilicet locus basium in punctum A; secundus basium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod est centrum propositi circuli CVE7; primus intervallorum in punctum E; ac tandem secundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeo insignis circulo CVE7 conveniat; posito scilicet quòd tam ratio AE ad EB, quàm ratio diametri EC ad BD sit ratio refractionis a raro ad densum, ac proinde etiam ratio AC ad CB; (hæc enim tertia ex duabus prioribus sequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 a raro quod est extra circulum, putà ab aëre incidens in densum quod est intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod est in circumferentia, si dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, sed frangatur in ingressu 33, ac fractus abeat in B, illud ex sequenti demonstratione manifestò patebit: quæ quidem demonstratio circulo specialis est, nec prolixa; universalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam suprà monuimus.

Ad hoc autem tria notanda sunt. Primum, quoniam est ut AE ad EB, ita AC ad CB, & quatuor puncta A, B, C, E sunt in eadem recta linea, estque A extra circulum, B intra, at EC est diameter; fit necessariò ut eductâ ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum EC, atque eâ utrinque productâ usque ad

circumferentiam, puncta in quibus ipsa circumferentiæ occurrit; sint ipsa V & 7, in quibus rectæ A V, A 7 ipsum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ K V, angulus K V A rectus sit, atque ita, ratio rectæ A V ad V B sive K V ad KB, rationi rectæ A K ad K V sit similis: atque earum rationum conversæ similes, scilicet B V ad V A, B K ad K V, & V K ad A K. Secundum, propter eandem rationem A E ad E B, & A C ad C B, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia utcunque assumptum ducuntur, in eadem quoque ratione existant, putà ut A E ad E B, sive ut A C ad C B: nam circumferentia E V 33 C 7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuimus, atque ideo etiam eadem est ratio A V ad V B, & A Z ad Z B, & A Y ad Y B, &c. unde, quoniam ponitur ratio A E ad E B esse ratio refractionis a raro ad densum, erit quoque A V ad V B, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis a raro ad densum. Tertium, ductâ rectâ ς 33 34 quæ circulum tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium a circuli circumferentia E 33 C, quo a linea recta tangente ς 33 34; siquidem in universum, linea quæcunque curva, & recta ipsam tangens, easdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Positâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ ς 33 34 pro dioptrica, sive pro superficie refractiva, & existente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.

His præmissis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, describatur circulus secans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum est, demissis in rectam 33 49 productam si sit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: ostendendum est 38 39 ad B 41 esse in ratione refractionis, putà

putà ut A E ad E B; hoc enim demonstrato, manifestum erit ex lege refractionum quam undecimo exemplo suprà exposuimus, fore ut si radius incidentiæ sit 36 33 38 A, tunc radius refractionis sit 33 B, & vicissim, si radius incidentiæ sit B 33, tunc radius refractionis sit 33 36: hoc autem sic demonstramus.

Ratio perpendicularis 38 39 ad perpendicularem B 41, componitur ex rationibus 38 39 ad A 40, & A 40 ad B 41: est autem 38 39 ad A 40, ut 38 33 ad 33 A, sive ut B 33 ad 33 A; & ut A 40 ad B 41, ita A K ad K B: quare ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus B 33 ad 33 A, & A K ad K B: ut autem B 33 ad 33 A, ita B V ad V A, ut jam secundo loco notavimus, & ita B K ad K V; ideoque ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus A K ad K B, & B K ad K V, quæ ambæ constituunt rationem A K ad K V. Ut ergo 38 39 ad B 41, ita A K ad K V, sive A V ad V B, sive A E ad E B, quæ est ratio refractionis, ut propositum est. Cúmque idem accidat omnibus punctis quæ in arcu V C 7 assumi possunt, patet arcum illum esse locum ad propositas refractiones, quarum ratio erit ut A E ad E B, quæ sanè perinsignis est circuli proprietas huc usque, ut existimamus ignota.

Hoc pacto iis satisfecimus quæ initio duodecimi exempli ostendere polliciti sumus, nempe casum tertium ex tribus universalibus Dioptricæ casibus, de quibus undecimo exemplo dictum est, aliquando ad superficiem sphæricam pertinere, sed multò magis universaliter ad alias superficies (nempe ovales de quibus suprà) quas antiquis notas fuisse nullibi apparet. Patet enim hunc secundum statum qui ad circulum, atque adeo ad sphæram pertinet, esse specialissimum, alios verò qui ad ovales, esse universaliores.

Porrò, qui supersunt status quinque, ad alias ovales pertinent, quas figurâ exhibere supervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquam ea breviter exposuerimus in quibus illæ a prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus,

V 3 duo-

duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustria sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

TAB. XII. Fig. 1. Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituantur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantùm habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in hac figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cúmque AE est ad EB in ratione refractionis a raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propiùs accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus.

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circa verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circa verticem E proximè disponuntur, exteriùs versùs A cavæ sunt. At post aliquam distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursus ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec postea mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio AE ad EB, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cordis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ est circa E cava sit exteriùs, non ad formam anguli ut cor, sed ad formam quasi rotundam; ut si fingas ovalem aliquam quæ priùs tota interiùs cava erat, ictu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inflicti, retusam esse ad

ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali ſicuti & in omnibus præmiſſis, ſemper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Dioptricam inutilis eſt, nempe uſque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ A V, A 7, ipſam ovalem tangunt, ut jam ſuprà ſæpius dictum eſt.

Quintus ſtatus dum A eſt in E; quod ad ſex locos baſium, centrorum, & intervallorum attinet, non admodum differt a tertio & quarto ſtatu præmiſſis. Ejus verò ovalis circa verticem E exteriùs cava eſt quàm maximè. Cæterùm eadem integra ad Dioptricam utilis eſſe poteſt, eſtque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis ſtatibus etiam convenit. In hoc etiam ſtatu hoc ſpeciale eſt circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, ſecundus centrorum, & ſecundus baſium tangant ſe invicem, atque etiam ovalem in ipſo vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem CE, eoſdem quatuor locos tangit in ipſo eodem E.

In ſexto ſtatu, ovalis adhuc cava eſt circa verticem E, ſed minus quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major eſt ratio rectæ BE ad EA, eò minùs cava eſt eadem ovalis. In ea ſex loci reperiuntur, ſed ita ut quatuor de quibus in quinto ſtatu dictum eſt, extra ovalem excurrant ultra E; unde evaneſcit tangens AL, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur perpendiculariter ad axem CE; exhibet enim illa punctum L ubi ſecat ſecundum locum baſium; punctum 17, ubi ſecat primum intervallorum; punctum 18, ubi ſecat ſecundum centrorum; & punctum 19, ubi ſecat ſecundum intervallorum, quod in ſeptimo caſu verum quoque reperitur. Sed & pro diverſis rationibus refractionum in diverſis mediis, atque etiam pro diverſis rationibus B E ad E A, accidere poteſt ut evaneſcat tangens B 24, quæ ex puncto B educta tangebat quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum baſium, quam tamen

tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem CE perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente AL jamjam dictum est, quod quivis Geometra facilè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorumdem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem B eductæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum similiter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovales perpendicularibus, multa dici possent elegantissima, quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam, maximè illustrarent: verùm illa ideo præterimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen monebimus: In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propiùs accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C: tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter

Fig. 1.

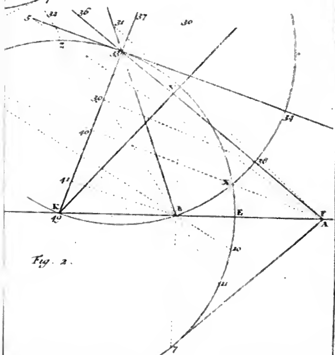


Fig. 2.

Roberval

inter ipsa. Sed de his satis: nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

De locorum divisione in diversos gradus.

MULTI sunt locorum gradus, immo infiniti; alii enim simplicissimi sunt; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur; quidam contrà oriuntur sive generantur a locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producunt.

Rursus, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirum in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantùm, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam, & conicas sectiones, putà conchoïdes omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ late-

rum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum a quadrangulo, & utrumque horum a cæteris: sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minus differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia a parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæ quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu a conchoïdibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantùm quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, postea declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam a multis quæri solet an ejusmodi loci tam plani quàm solidi & lineares, omnes in universum geometrici dici debeant, extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habiti, qui præter locos planos, nullos alios admittebant, ac cæteros tanquam a Geometria prorsus alienos respuebant, ita ut problema quodvis insolutum existimarent, quod beneficio locorum planorum solvi non posset, quantumcumque idem aut per locos solidos aut per lineares solveretur: ideo non abs re fuerit hoc loco disquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum censeri debeat, positis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti solent.

Sanè in universum, quæstio est de nomine, ut manifestò patet: tamen, quia multi præ arrogantia, ea omnia damnare consueverunt quæ ignorant, ne scilicet re quadam alicujus pretii privari videantur; ac sic multa respuunt quæ a doctis communiter recipiuntur.

Ut talium sic leviter sub appositis suo modo falsis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis studiosus vitare possit, lubet

lubet rem ipſam a fundamentis reſumere, quibus intellectis, facile erit cuicunque propoſitionem aliquam geometricè aut ſecùs ſolutam, temere affirmanti aut neganti reſpondere, atque ipſius affirmationem aut negationem falſam, levem, aut temerariam eſſe, ex ipſius ſcientiæ principiis evidenter demonſtrare.

Ac primùm omnium convenit propoſitiones arithmeticas a geometricis diſtinguere; ſiquidem illas arithmeticè, hoc eſt per operationes ſive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc eſt per locos geometricos, ſolvi conſentaneum eſt, ut debito ſeu legitimo modo ſolutæ dici debeant. Neque tamen negamus utraſque operam ſibi mutuam præbere, ac ſibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod ideo non impedit ne arithmetica arithmeticè, geometrica geometricè tractentur.

Arithmeticæ ergo propoſitiones ſolvuntur vel addendo, vel ſubtrahendo vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus ſeu unitati commenſurabilibus, quàm in numeris irrationalibus ſeu ſurdis, vel unitati incommenſurabilibus; &, ſive in numeris ſimplicibus, ſive in compoſitis ejuſmodi operationes inſtituantur, juvante ubicunque Geometria ſi opus fuerit, cujus præcipuæ partes ſunt diſtinguere atque imperare ubi & quando addere, aut ſubtrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multùm refert utrùm ſolutio in minimis aut in ſimpliciſſimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compoſitis; ſæpe enim accidit ut vel multiplicationes, vel diviſiones, vel radicum extractiones adeo intricatæ ſint, ut ipſas explicare nimis arduum opus ſit, nec quodpiam tantæ operæ prætium ſatis dignum exiſtat.

Neque tamen diffitendum eſt ea ingenia longè aliis prælucere, quibus datum eſt quæſtiones quaſcunque ſimpliciſſimo modo ſolvere: at illa bonis ſuis gaudeant, modò ne aliorum ſolutiones minùs ſimplices tanquam ſpurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendant.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè ſolvenda. $B^{\text{ſolidum}}$ —— C^{plano} in A —— A^{cubo} ∞ o, & $B^{f.}$ ſit numerus infrà poſitus, nempe apotome, ſicuti & $C^{p.}$ 729.

$B_{f.}$ Apotome. { + 142884 — √q 17962705800 } —— 729 A —— A^{3} ∞ o.

Ponamus autem quendam vel neſcire, vel non admodum curare methodum quâ ejuſmodi æquatio breviſſimo aut ſimpliciſſimo modo ſolvi queat, ſed tantùm id curare, quo modo illa utcunque ſolvatur.

Equidem ex conſtitutione illius, patet ipſam irregularem eſſe, nec de tribus lateribus explicabilem, verùm de unico tantùm, eodemque ſuprà: hoc ex noſtro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius conſtitutio ex Vieta elegantiſſimè deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continuè proportionales, quorum qui continetur ſub extremis vel mediis eſt tertia pars numeri radicum, ſive tertia pars affectionis ſub A; qui numerus in noſtro exemplo eſt C. 729, & ejus tertia pars eſt 243: differentia autem extremorum eſt ille numerus qui oritur diviſo $B^{f.}$ per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille ſolidus eſt hæc apotome 142884 —— √ 17962705800; eo per 243 diviſo, oritur hæc alia apotome 588 —— √ 304200, quæ ideo eſt differentia numerorum extremorum. Eſt autem numerus quæſitus A in eadem ſerie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducicitur, ut ex quatuor numeris continuè proportionalibus, datâ differentiâ extremorum; nempe 588 —— √ 304200; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facili viâ habentur ex data differentia ipſorum, & producto eorumdem; nam ſemidifferentia eſt 294 —— √ 76050, & hujus ſemidifferentiæ quadratum eſt hæc apotome 162486 —— √ 26293831200, quod additum ipſi producto

243,

243, dat hanc aliam apotomen 162729 —— √ 26293831200, cujus radix quadrata est dimidia summa extremorum √ 88200 —— 273. Huic apotome si addas semidifferentiam extremorum prædictam, nempe 294 —— √ 76050, fit major extremorum quæsitorum, hoc nempe binomium √ 450 + 21. Quòd si ex eadem apotome √ 88200 —— 273, seu ex dimidia summa extremorum, demas eandem semidifferentiam extremorum 294 —— √ 76050, fit minor extremorum quæsitorum, nempe hæc apotome √ 328050 —— 567. Hoc pacto, datis extremis, quærendi sunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæsitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc universale theorema est: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi est cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi est cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem √ 450 + 21, minori autem √ 328050 —— 567, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi est binomium 891 + √ 793800: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium √ 265720050 + 5103, & hic est cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi est hæc apotome 649539 —— √ 421857865800; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen √ 1937102445 0 —— 137781, & hic est cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, superest ut cuborum ipsorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, est binomium: alter autem, seu minor, est apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quæstionem, si non simplicissimo modo, at certè accuratè omnino solverit; siquidem earum radicum differentia erit numerus A quæsitus, nec alio quovis modo, quamquam simpliciori, alius invenietur numerus. Quòd si reperiatur aliquis qui talem artem ignoraverit, is postquam cubos prædictos invenerit, ibi subsistet, ac dicet numerum quæsitum A esse differentiam radicum cubicarum talium numerorum ex-

hibitorum sic $\sqrt{}^{cub.}$ hujus binomii $| \sqrt{q}\, 26572050 + 5103 | - \sqrt{}^{c.}$ hujus apotomes $| \sqrt{q}\, 1937102 4450 - 137781.$ | Et sanè ea dici poterit aliqua esse solutio, quoniam ipsa ad numeros certos ac determinatos reducta est. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipsarum differentia per ejusmodi radicum extractionem exhiberi non potest, quamvis illa aliquando rationalis existat; quò fit ut eâdem, vel aliâ viâ quærenda sit, vel eâ ratione quâ suprà, per ipsos cubos irrationales exhibenda.

Verùm in proposito exemplo, radices cubicæ a perito rectè extrahi possunt, quibus exhibitis solutio longè erit elegantior; sunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium $\sqrt{q}\, 162 + 9$; apotomes verò; hæc apotome $\sqrt{q}\, 1458 - 27$. Sint ergo hi numeri duo medii quæsiti, quorum differentia est hæc apotome $36 - \sqrt{q}\, 648$ quæ exhibet numerum A quæsitum; quo pacto habemus hoc modo satis longo atque intricato, solutionem quæstitionis propositæ: atque etiamsi methodus talis solutionis simplicissima non sit, tamen numerus A inventus est simplicissimus.

Verumenimvero sagacior aliquis Analysta, multò compendiosiori viâ eandem inveniet solutionem. Is enim statim propositâ hâc eâdem æquatione cubica,

$$\text{Bf.} \begin{cases} + & 142884 \\ - & \sqrt{q}\, 17962705800 \end{cases} - 729A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci posse; quandoquidem datur numerus 3, cujus quadratus 9 dividere potest Cp ∞ 729, ita ut ejusdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque possit Bf. $142884 - \sqrt{q}\, 17962705800$; ac divisione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur $5292 - \sqrt{q}\, 24640200$.

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

Df.

$$D^{s}.\left\{\begin{matrix} 5292 \\ -\sqrt{q}\,24640200 \end{matrix}\right. - F^{p}\,81\,E - E^{c} \infty 0.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsita. Eſt tamen hæc nova æquatio ejuſdem conſtitutionis cum ea quæ initio propoſita eſt; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus ſub extremis vel mediis ſit 27 tertia pars F^{p}, ſive numeri 81; differentia verò extremorum ſit hæc apotome $196 - \sqrt{q}\,33800$, quæ oritur diviſo ſolido D per prædictum numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iiſdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium $\sqrt{q}\,50 + 7$, & minor hæc apotome $\sqrt{q}\,36450 - 189$. His datis extremis darentur cubi mediorum methodo ſuperiùs traditâ; verùm, eidem Analyſtæ, quem ex ſagacioribus aliquem ſupponimus, dabitur locus ſubtili ſanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividi poteſt, putà minor ſive $\sqrt{q}\,36450 - 189$, quâ diviſione reperitur hæc apotome $\sqrt{q}\,50 - 7$; ſumatur ergo talis apotome $\sqrt{q}\,50 - 7$ loco minoris extremi, majore eodem ſemper remanente binomio $\sqrt{q}\,50 + 7$, ut ſuprà. Hac tamen lege, ut poſtquam inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum ſcilicet numeri 3, cujus cubus 27 diviſor fuerit minoris ipſius extremi, nempe $\sqrt{q}\,36450 - 189$: alter autem eorumdem inventorum mediorum ab extremo minore diviſo remotior, multiplicetur per 3 radicem ejuſdem cubi 27 diviſoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extremos quos ex ſecunda æquatione præmiſſa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium $\sqrt{q}\,50 + 7$, & apotomen $\sqrt{q}\,36450 - 189$.

Reſu-

Resumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos post divisionem per cubum 27, qui sunt $\sqrt{q}\,50 + 7$, & $\sqrt{q}\,50 - 7$, inveniamusque inter eosdem, duos medios continuè proportionales.

Rursus autem hic quiddam accidit notandum. Nam si quis per traditam suprà regulam, datis extremis, quærat cubos duorum mediorum, is inveniet tales cubos esse eosdem ipsos extremos: quod ideo accidit, quia binomium & apotome quæ ipsos extremos constituunt, iisdem constant nominibus; ac præterea quadrata ipsorum nominum unitate tantùm differunt, quod quoties accidit, toties duo extremi sunt cubi duorum mediorum, unusquisque scilicet illius qui sibi proximus est.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, sive $\sqrt{q}\,50 + 7$, hoc binomium $\sqrt{q}\,2 + 1$: at apotomes, sive $\sqrt{q}\,50 - 7$, hæc apotome $\sqrt{q}\,2 - 1$; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales,

$$\sqrt{q}\,50 + 7, \mid \sqrt{q}\,2 + 1, \mid \sqrt{q}\,2 - 1, \mid \& \sqrt{q}\,50 - 7,$$

in numeris multò minoribus quàm antea. Quòd si intacto primo, ut suprà decrevimus, secundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui antea divisor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E superiùs expositam, pertinent, quorum primus erit in utraque serie idem $\sqrt{q}\,50 + 7$; secundus $\sqrt{q}\,18 + 3$; tertius $\sqrt{q}\,162 - 9$; & tandem quartus, $\sqrt{q}\,36450 - 189$. Horum quatuor, differentia mediorum est $12 - \sqrt{q}\,72$; is autem est numerus E quæsitus in æquatione, qui numerus, si tandem per 3 multiplicetur, per eum scilicet numerum cujus beneficio depressa est suprà æquatio de A, & ad æquationem de E reducta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui antea $36 - \sqrt{q}\,648$, sed multò breviori multóque simpliciori methodo inventus, propter quam tamen non est quòd, qui illam calluerit, nimiùm arroganter superbiat.

Hic

Hîc quærere posset aliquis an detur certa aliqua regula quâ dignoscamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propositam, esse primi vel secundi, quarti vel quinti ordinis, tum sic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum si differentia reperiatur esse cubus numerus habens radicem minimè surdam, sed unitati commensurabilem, benè est, nec alia præparatione est opus: sin secùs, tunc aliqua præparatione utendum est, de qua dicemus postea. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M solidum; minus autem vocetur N solidum: tum alterutra ex sequentibus duabus æquationibus cubicis solvatur, nempe

$$\tfrac{1}{4}\ \text{M}s. + \tfrac{3}{4}\ \text{B}p.\ \text{A} - \text{A}^3 \infty\ 0,$$
$$\text{vel}\ \tfrac{1}{4}\ \text{N}s. - \tfrac{3}{4}\ \text{B}p.\ \text{A} - \text{A}^3 \infty\ 0:$$

prior quidem, si binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; posterior autem, si secundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet esse numerus minimè surdus, atque ideo inventu facillimus. Quòd si illa radix non reperiatur esse rationalis, seu unitati commensurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Esto ergo illa cubicæ æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, a cujus quadrato si dematur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus constituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæsita. At secunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato si addatur B planum, fiet quadratum minoris nominis;

Y

nis; atque ab illis nominibus constitutum binomium, vel apotome, erit radix cubica quæ quæritur.

Jam verò existente binomio vel apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, sed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non est, vocetur $C^{ff.}$, ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propositorum nominum binomii vel apotomes cujus radix investigatur, putà $M^{f.}$ & $N^{f.}$; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejusdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omnino non refert quis sit multiplicator per quem multiplicentur nomina $M^{f.}$ & $N^{f.}$ modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator quicunque ille sit, vocetur $C^{ff.}$ sive ille sit idem qui suprà, sive non; est tamen primus communiter simplicissimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione constitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica convenienti: tum radix inventa dividatur per $C^{p.}$ hoc est per radicem cubicam $C^{ff.}$ quæcunque sit illa radix, surda, vel rationalis; quotiens enim talis divisionis dabit radicem cubicam initio quæsitam.

Ponamus tandem propositum binomium vel apotomen, esse tertii vel sexti ordinis; atque, ut suprà, majus nomen esto $M^{f.}$ minus autem $N^{f.}$; & $C^{ff.}$ esto differentia quadratorum nominum ipsorum. Tum inveniatur numerus aliquis $D^{ff.}$, qui multiplicans $C^{ff.}$ faciat cubum, multiplicans autem vel $M^{ff.}$, vel $N^{ff.}$ faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facilè inveniuntur) ac per $D^{f.}$, hoc est per radicem quadratam numeri $D^{ff.}$, multiplicetur utrumque nominum $M^{f.}$ & $N^{f.}$; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (si illa explicabilis sit) habebitur per præmissam regulam mediante congruenti æquatione cubica, ut dictum est: hæc

hæc ergo radix cubica divisa per D, hoc est per radicem solido-solidam, seu cubo-cubicam numeri D^{ff}., dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina sunt M^{f}. & N^{f}., quam invenire propositum erat.

Plurima super hac re dici poterant; sed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim persequi voluimus, & quæ dicta sunt sufficient Analystæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec est quòd quis dicat, hoc modo proponi obscurum per obscurius explicandum, dum inventionem radicis cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad resolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis solutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, si surdus existat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate solvetur æquatio illa, quàm si simplex divisio absolvenda esset; quod sanè callere debet quicunque Analysim vel mediocriter coluerit. Legatur Vieta lib. de æquationum recognitione & emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio sic transmutari potest, ut coëfficiens sit quæ præscribitur: statuatur enim coëfficiens unitas; tum verò solidum comparationis erit cubus aliquis suo latere auctus vel mulctatus: cætera plana sunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo satis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum arithmeticè solutum dici possit: qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illustres præteriti sæculi viri, inter quos longè excelluit ipse Vieta, dum talium problematum solutionem, non quidem singularem pro singulis problematis, sed universalem pro qualibet specie problematum, per species ad id a se inventas inquisivit.

Neque abs re fuerit Analystam monere, quæstionem omnem in numeris propositam, in qua, ex datis quibusdam numeris, alius aliquis numerus quæritur secundùm leges quasdam in eadem quæ-

ſtione præſcriptas, ſemper eſſe quæſtionem ſingularem; atque etiamſi illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur: tamen non temere ſtatim pronuntiandum eſſe, talem quæſtionem ſolidam eſſe aut linearem, ſæpiſſime enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana ſit; dico vi inductionis logicæ, quoties ſcilicet ſolutio illius datur in numeris qui logicâ inductione initâ, neceſſariò reperiuntur. Ut ſi experiar num æquatio aliqua de unitate ſit explicabilis, num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, ſenario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypotheſi, numeri in ipſa æquatione expreſſi ſunt, qui radicem quæſitam intra certos ac præfinitos terminos coërcent. Aut ſi certâ aliquâ conjecturâ deprehenderim illam, non de integro numero, ſed de fracto explicabilem eſſe, cujus numeri fracti denominator ex recognitione ipſius æquationis innoteſcat: tum inductione factâ, quæram numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, ſenarium, ſeptenarium, &c. donec illum invenero, qui experiundo ſatisfaciat propoſitæ quæſtioni; neque enim rurſus, in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, ſi ex recognitione talis æquationis deprehendero ipſam nec de integro numero nec de fracto explicari poſſe, ſed de ſurdo aliquo, cujus tales ex ipſa recognitione innoteſcant conditiones, ut ille, quamquam ſurdus, inductione factâ detegi poſſit: tales omnes æquationes planæ cenſeri debent, non autem ſolidæ aut lineares, ſub quarum ſpecie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis exiſtit præmiſſa æquatio cubica numerica, in qua ſatis jamjam immorati ſumus, quæ tamen primâ fronte alicui minùs perito Analyſtæ, ſolida quædam quæſtio ex iis quæ inſolubiles vulgò cenſentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum ſit, aut cenſeri debeat explicemus. Geometricum in univerſum vocamus quodcunque intelligibile eſt in materia geometrica, nullâ habitâ ratione ſenſuum externorum, putà viſus, auditus, tactus,

ctus, gustus, vel olfactus, nisi quatenus illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causa esse poterit cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam suspiciat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstret. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Materia verò geometrica est omne extensum, quatenus extensum, & quidquid ad illud pertinet sub eadem ratione; quales sunt termini illius, quales figuræ, quales rationes & proportiones magnitudinum ad invicem, & si quid aliud ad tale argumentum pertineat. Itaque lineæ omnes, omnesque superficies quæ certis atque intellectu planè perceptis regulis describuntur, omnino geometricæ sunt, sicuti & figuræ quæcunque talibus lineis, ac talibus superficiebus continentur. Nec refert quòd illæ omnes lineæ, superficies, & reliquæ, mediante motu aliquo vel simplici vel composito, ut plurimùm sub intellectum cadant. Nam primùm, motus ille, sive sit puncti alicujus ad lineam aliquam describendam, sive sit alicujus lineæ ad describendam superficiem, sive superficiei ad solidum describendum, est simpliciter intelligibilis; non autem sensu externo perceptibilis, nisi quatenus ad meram praxim refertur, quæ sensus externos respicit, nec ad puram geometriam, hoc est purè intelligibilem, reducitur; sed & puncta, lineæ, aut superficies, quæ moveri intelliguntur, purè sunt geometricæ, abstrahuntque a materia sensibili; & per spatium purè geometricum, atque a materia sensibili abstractum, motus suos perficere intelliguntur, transeuntque a termino noto ad notum terminum per notum medium, secundùm leges notas, & clarâ ac distinctâ intellectus notione, aut firmo ratiocinio stabilitas; aliàs enim, nisi has sortiantur conditiones, illæ tanquam spuriæ, atque a Geometria prorsus alienæ respuuntur.

Secundò, etiamsi, qui rerum geometricarum minùs periti sunt, putent lineas, superficies, & solida, motu punctorum, linearum, & superficierum revera gigni, ita ut iidem existiment magnitudines illas tum primùm esse incipere, cùm primùm a tali motu producuntur: tamen ei qui rem penitùs inspexerit, manifestò patebit illam longè aliter se habere; quippe, posito tantùm spatio geometrico omnimode extenso, (illud autem spatium, etiam nemine cogitante, in rerum natura ponitur) ponuntur statim tales magnitudines in tali spatio, etiam nemine cogitante & abstrahendo ab omni motu, atque omnes simul in ipso existunt absque omni intellectus operatione. At motus ad hoc inservit, ut per omnes partes ipsarum magnitudinum intellectum successivè perducendo, illum faciliùs ad earumdem cognitionem pertrahat. Sic enim comparatus est humanus intellectus, ut vix quippiam, præcipuè si extensum est, simul ac totum apprehendat, sed tantùm successivè ac per partes; quod sanè est motu intellectivo moveri per tale extensum, nec tamen illud motu ipso in rerum natura ponitur, sed tantùm eodem mediante intelligitur, cùm priùs absque omni motu, atque ab intellectu independenter extaret.

Cùm ergo Euclides sphæram, conum, ac cylindrum; cùm Apollonius superficiem conicam; cùm Archimedes sphæroïdem, conoïdem, & helices; cùm alii conchoïdes, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, atque innumeras ejusmodi lineas & figuras per motus describunt; immo quidam lineam rectam per motum puncti, & circulum per motum rectæ lineæ: illi omnes sic intelligendi sunt, ut voluerint magnitudines ipsas priùs existentes, eodem modo quo a se conciperentur, aliorum intellectui exponere, seu ostendere; quod cùm aliter faciliùs non possent, hoc modo per motus, vel simplices, vel compositos omnino feliciter effecerunt.

Rursus, quòd quædam lineæ aut quædam superficies, beneficio instrumentorum mechanicorum faciliùs describantur, quædam difficiliùs, id non facit ut illæ magis, hæ minùs sint geometricæ:

cæ: ejuſmodi enim mechanicæ deſcriptiones praxim reſpiciunt, & ad ſenſus externos referuntur, non autem ad puram Geometriam, quæ, ut ſæpe diximus, ſolum reſpicit intellectum.

Quòd etiam ex iiſdem lineis aut ſuperficiebus, quædam ſimpliciores, quædam verò magis compoſitæ intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, ſed ex debilitate intellectus humani procedere manifeſtum eſt: ex noſtra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ ſimpliciori modo, ſaltem noſtro reſpectu, ſolvi poterunt, eo ſolvi debeant; & contra talem regulam peccaſſe cenſeatur quiſquis, cùm ſimpliciori loco uti poſſet, ad magis compòſitum recurrerit. Dicemus autem paulò pòſt de diſtinctione locorum in magis aut minùs ſimplices ex conſtitutione Geometrarum qui nos hac in re præceſſerunt, ut ſic quis cuique quæſtioni locus proprius ſit innoteſcat.

Sed ut magis eluceſcat in hac materia locorum, nec facilitatem deſcriptionis, nec majorem aut minorem ſimplicitatem intellectionis alio modo attendendam eſſe quàm reſpectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis ſit Geometriæ finis in locis ipſis conſtituendis. Conſtat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, niſi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectum latebant, ut quod verum eſt, verum eſſe; quod falſum eſt, falſum eſſe; quod fieri poteſt, fieri poſſe, & quo modo, & quot modis, manifeſtum fiat, idque ſemper in materia geometrica; quod tamen non impedit ne talis cognitio poſtea materiæ ſenſibili applicetur. Ac planè ejuſmodi loci primò & per ſe quædam ſunt cognoſcendi inſtrumenta; ſecundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi ſunt inſtrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, ſcientiam, vel intelligentiam, attinet, ſive illa faciliùs, ſive difficiliùs acquiratur, & ſive per media ſimplicia, ſive per compoſita, modò talia media ſint clarè ac diſtin-

distinctè nota, qualia sunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejusmodi principiis incipiendo, & per media ipsa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certum est eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut scientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut simplicioribus mediis acquisitam. Atque omnino una eademque intelligentia seu scientia est, sed diversis mediis acquisita; quæ media, si faciliora aut simpliciora sint, vel secùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum est; aliàs enim, si perfecta esset humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia cognitionis, & media omnia, sed & ipsam cognitionem, uno intuitu, nullo prorsus labore nullaque difficultate haberemus, nec simplicis aut compositi ulla esset ratio.

Jam verò, si ad materiam sensibilem, seu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia constans, multò minùs media aut operandi rationem accusabimus in ipso opere jam confecto, si illud his aut illis mediis æquè benè absolutum sit; nec ullo jure tali respectu quis dixerit hæc aut illa media esse respuenda tanquam erronea ac minimè legitima, sed tantùm alia aliis esse præferenda; quippe faciliora difficilioribus, & simpliciora magis compositis: quod sanè ex nostra agendi debilitate rursus repetendum est; secùs enim, positâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipsum nullo labore consequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, sicuti nec simplicioris nec magis compositi ratio haberetur.

Pro-

Propositum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare, & qui simpliciores sint loci, aut secùs, explicare.

DICITUR locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cùm ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus specificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad summum sint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari potest. Primus modus absolutus est, alter respectivus.

Modus absolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per se absolutè ac nullo aliorum respectu considerandus, ita ut æquatio ex eo deducta, ad ipsum præcisè pertineat, non vero ad ullum alium.

Modus respectivus ille est in quo duo communiter, aliquando etiam, sed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter se comparandi, ut ex eorum sectione, vel tactione, vel datâ aliquâ distantiâ, vel omnino ex præscripta aliqua conditione, vel inter ipsos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes istos locos simul tali respectu pertineat; ita tamen ut nihil referat si æquatio illa ad alios etiam locos pertinere possit.

Et hi quidem modi ambo admodum universales sunt, continentque sub se singuli infinitos particulares modos, non solùm habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & specie, & numero infiniti sunt, sed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum singulis innumeræ æquationes deduci possunt; siquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diversæ loci illius proprietates specificæ: unde numerus talium modorum non magis finitus est, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & industria; sed & ex infinita locorum ipsorum complicatione, id est, sectione, tactione,

&c. innumeri etiam oriuntur modi respectivi, siquidem duorum tantum diversimode complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi possunt.

At verò, etiamsi nullus ex talibus modis ad nostrum institutum inutilis dici possit, si scilicet ad abundantiam doctrinæ respiciamus: tamen si necessitatis tantùm ratio habeatur, paucissimi sufficiunt, iique non admodum intricati aut difficiles existunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo absoluto, tum de respectivo, atque utrumque, selectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus desumptis illustremus.

DE CIRCULO.

Tab. XIII. Fig. 1. PROPONATUR ergo primùm circulus cujus centrum sit A, circumferentia BDC, & sit una diametrorum BC, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis esto proprietas illa, quòd omnis recta, putà DE, cadens a circumferentia in diametrum ad rectos angulos, sit media proportionalis inter portiones diametri BE, EC; hæc ergo proprietas specifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circulum. Ex illo modo innumeræ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto	b,	Item AB esto	b,
DE	a,	DE	a,
DE quadratum	a^2,	DE quadratum	a^2,
BE	e,	CE	e,
EC	$2b - e$,	BE	$2b - e$,
BEC rectangulum	$2be - e^2$.	BEC rectangulum	$2be - e^2$.

Ergo æquatio,

$$+ 2be - e^2 \infty a^2,$$

vel

$$+ 2be - e^2 - a^2 \infty 0.$$

Unde æquatio erit ut suprà,

$$+ 2be - e^2 - a^2 \infty 0.$$

Ita-

Itaque propositâ lineâ curvâ BDC, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatam BC, demissâ perpendiculari DE, si talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejusmodi curvam esse circuli circumferentiam; est enim reciproca proprietas, & simpliciter converti potest quæ de illa concipitur propositio, ut satis facilè consideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit $2b$.

Quòd si loco circumferentiæ circuli assumpta esset ellipsis; tum sub iisdem speciebus $2be - e^2$ fuisset ad a^2 in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut transversum latus ad rectum, quam rationem supponimus esse datam. Conversa etiam vera est.

Rursus, si DE in BC incidisset ad angulos obliquos, reliquis ut suprà positis, in omni ratione haberetur ellipsis. Sed hæc ex conicis clara sunt.

Secunda Æquatio.

Iisdem positis: ex DE detrahatur data EF quæ vocetur c, & DF vocetur i, atque ideo DE quadratum erit $+ c^2 + 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis insistendo, talis erit æquatio, $+ 2be - e^2 \propto c^2 + 2ci + i^2$, vel $- c^2 \begin{matrix} + 2be - e^2 \\ - 2ci - i^2 \end{matrix} \propto 0$.

Itaque ex tali vel simili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immo, si $+ c^2 + 2ci + i^2$ vocetur una specie a^2; (species enim illa de i quadrata est) tunc in primam æquationem omnino incidemus, ut manifestum est. Vicissim, facile erit ex prima in hanc secundam devenire.

De ellipsi eadem quæ suprà enuntiabimus.

Hæc æquatio non est reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; siquidem ex illa non minùs ellipsim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà satis patebit.

At verò ad tales æquationes reducetur alia quæ sequitur $+2be - u^2 \infty o$, intelligatur enim u^2 majus esse quam e^2, & differentia eorum vocetur a^2. Fiet ergo manifestò hæc æquatio $+2be - e^2 - a^2 \infty o$, & hæc est prima præcedentium, ex qua ad secundam facilè deducemur. Hîc autem longitudo u æqualis erit rectæ BD, vel CD, cujus quadratum æquale est, vel duobus quadratis BE, DE simul, vel duobus CE, DE simul, quandoquidem ipsum u^2 æquale ponitur esse duobus simul $a^2 + e^2$.

Tertia Æquatio.

Iisdem positis, eidem DE addatur in directum quævis DG, & tota EG data sit sub specie c, & DG ignota vocetur i; atque ideo DE quadratum erit $c^2 - 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis, $+2be - e^2 \infty c^2 - 2ci + i^2$, vel per antithesim,

$$-c^2 \begin{matrix} +2be - e^2 \\ +2ci - i^2 \end{matrix} \infty o.$$

Ex tali ergo vel simili æquatione concludemus circulum.

Quòd si recta DG sit data sub specie c, & EG ignota vocetur i: tunc iisdem vestigiis in eandem prorsus æquationem incidemus. Idem accidet, si DE producatur versùs E in H, & vel tota DH sit c, EH autem sit i, vel e contrario, EH sit c, DH autem sit i.

Jam, vel $c - i$, vel $i - c$ esto a; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifestum est.

Sicut autem secta est DE in F, vel producta in G vel H: sic potuit secari vel produci CE, & vel ipsâ solâ manente DE insectâ & sine productione, vel etiam utraque tam CE quàm DE; quod satis per se atque ex præmissis clarum est. Idem de BE quàm de CE dictum esto.

Quar-

Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ, a centro circuli ad ejus circunferentiam ductæ, sint æquales.

Iisdem positis, esto AE ignota sub specie y; & quoniam AD seu AB est b, & DE est a, ideo talis erit æquatio, $b^2 \infty a^2 + y^2$, sive $b^2 - a^2 - y^2 \infty o$. Itaque, ex ejusmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca est.

Jam verò, ut suprà, esto a æqualis, vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, prout scilicet vel EF erit c, & DF erit i; vel EG erit c, & DG erit i; vel DG erit c, & EG erit i: tumque habebimus alterutram ex duabus sequentibus æquationibus $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix} - 2ci \begin{matrix} -i^2 \\ -y^2 \end{matrix} \infty o$, vel $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix} + 2ci \begin{matrix} -i^2 \\ -y^2 \end{matrix} \infty o$: ex quibus circulum quoque concludere licet, modò sub similibus speciebus proponantur; sic enim illæ sunt reciprocæ, seu specificæ.

Eodem modo hîc AE secari vel produci poterit quo suprà dictum est de ED, BE, vel CE.

Quòd si proponatur aliqua ex his tribus $+d^2 - fi - u^2 \infty o$, vel $+d^2 + fi - u^2 \infty o$, vel $-d^2 + fi - u^2 \infty o$: tunc licebit illas ad alterutram ex duabus præmissis postremis reducere. Nam $+d^2$ intelligetur æquale esse $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix}$, vel $-d^2$ æquabimus $\begin{matrix} +b^2 \\ -c^2 \end{matrix}$; at $+u^2$ ponemus æquale esse $\begin{matrix} +i^2 \\ +y^2 \end{matrix}$: unde sequetur id quod propositum est.

Non sunt tamen illæ tres reciprocæ; siquidem ex illis non minùs ellipsim, parabolam aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas sequentes reducere, posito quòd $b - y$ sit e, ut satis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres

priores poterunt ad quartam reduci, poſito quòd $b - e$ ſit y.

Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, ſed ea præcipua ſufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

DE PARABOLA.

TAB. XIII. Fig. 2. Esto parabola BD, cujus latus rectum ſit AB, diameter BE, ſive illa ſit axis, ſive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata ſit DE. Oporteat autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliqua æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis eſto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujuſvis, putà DE, æquale ſit rectangulo contento ſub latere recto AB & ſub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ ſpecifica eſt, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducentur æquationes, quales ſunt quæ ſequuntur.

Prima Æquatio.

AB eſto.	b,
DE	a,
DE quadratum	a^2,
BE	e,
ABE rectangulum	be.

Æquatio.

$$be \infty a^2,$$

vel

$$be - a^2 \infty 0.$$

Itaque, propoſitâ curvâ aliquâ BD, atque in ea ſumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes ſit indefinita: ſi ducta recta DE datæ cuipiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis ſit inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam eſſe parabolam. Eſt enim reciproca proprietas, ex vi hypotheſis, quòd DE ſit ſemper datæ parallela, aliàs

aliàs enim posset æquatio præmissa circulum exhibere, ut notatum est ad secundam circuli æquationem, dum proposita est æquatio $2be - n^2 \infty o$. Hoc autem planè manifestum est.

Secunda & Tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur secunda & tertia æquatio, quàm in circulo dictum est, divisâ scilicet DE in F, aut eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio $be \infty c^2 + 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be - 2ci - i^2 \infty o$, atque id ex divisa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \infty + c^2 - 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be + 2ci - i^2 \infty o$.

Et hæ quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitis sunt reciprocæ, existente rectâ DE datæ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si recta BE dividatur in I, vel eadem producatur, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positis, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisa ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisa, ac BI esto data sub specie d, IE autem esto y; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, talem induet speciem $bd + by$: itaque positâ DE indivisâ sub specie a, talis erit æquatio $bd + by \infty a^2$, vel $bd + by - a^2 \infty o$. At positâ DE divisâ sub specie $c + i$, æquatio erit ejusmodi $bd + by \infty c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \infty o$. Quod si CB sit data sub specie d, CE autem sit y, erit ipsius BE species $y - d$: contrà autem, si CE sit d, & CB sit y, erit ipsius BE species $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere. Ad

priores poterunt ad quartam reduci, posito quòd $b-e$ sit y.

Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, sed ea præcipua sufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

DE PARABOLA.

Tab. XIII. Fig. 2. Esto parabola BD, cujus latus rectum sit AB, diameter BE, sive illa sit axis, sive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata sit DE. Oporteat autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliqua æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis esto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujusvis, putà DE, æquale sit rectangulo contento sub latere recto AB & sub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ specifica est, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto.	b,
DE	a,
DE quadratum	a^2,
BE	e,
ABE rectangulum	be.

Æquatio.

$$be \infty a^2,$$

vel

$$be - a^2 \infty o.$$

Itaque, propositâ curvâ aliquâ BD, atque in eâ sumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes sit indefinita: si ducta recta DE datæ cuipiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis sit inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam esse parabolam. Est enim reciproca proprietas, ex vi hypothesis, quòd DE sit semper datæ parallela; aliàs

aliàs enim poſſet æquatio præmiſſa circulum exhibere, ut notatum eſt ad ſecundam circuli æquationem, dum propoſita eſt æquatio $2be - n^2 \infty o$. Hoc autem planè manifeſtum eſt.

Secunda & Tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur ſecunda & tertia æquatio, quàm in circulo dictum eſt, diviſâ ſcilicet DE in F, aut eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit ſecunda æquatio $be \infty c^2 + 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be - 2ci - i^2 \infty o$, atque id ex diviſa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \infty + c^2 - 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be + 2ci - i^2 \infty o$.

Et hæ quidem omnes æquationes ſub ſpeciebus exhibitis ſunt reciprocæ, exiſtente rectâ DE datæ alicui rectæ ſemper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere ſemper licebit, ſpeciebus tamen immutatis.

Quòd ſi recta BE dividatur in I, vel eadem producatur, ſive versùs B in C, ſive versùs E in K, reliquis eodem modo quo ſuprà poſitis, multæ inde orientur æquationes, quædam ſcilicet manente DE indiviſa ac ſine productione, reliquæ autem ipſâ DE diviſâ vel productâ. In exemplo enim eſto BE diviſa, ac BI eſto data ſub ſpecie d, IE autem eſto y; unde rectangulum ſub AB, BE, quia æquale eſt duobus ſimul, ei ſcilicet quod continetur ſub AB, BI, & ei quod continetur ſub AB, IE, talem induet ſpeciem $bd + by$: itaque poſitâ DE indiviſâ ſub ſpecie a, talis erit æquatio $bd + by \infty a^2$, vel $bd + by - a^2 \infty o$. At poſitâ DE diviſâ ſub ſpecie $c + i$, æquatio erit ejuſmodi $bd + by \infty c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \infty o$. Quod ſi CB ſit data ſub ſpecie d, CE autem ſit y, erit ipſius BE ſpecies $y - d$: contrà autem, ſi CE ſit d, & CB ſit y, erit ipſius BE ſpecies $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex ſingulis, ſub iiſdem ſpeciebus, parabolam concludere.

Ad

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ non erunt reciprocæ. Sed hoc indicasse sufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

DE HYPERBOLA.

Ex infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri potest, duo videntur præcipui: alter quidem, cùm illa ad aliquam ex suis diametris refertur; alter autem, cùm illa refertur ad unam ex suis asymptotis.

TAB. XIII. Fig. 3. Esto hyperbola BD, cujus vertex sit B, rectum latus AB, transversum BC, centrum L in medio ipsius BC, cæteris ut suprà in parabola positis. (Vide figuram parabolæ, & finge esse hyperbolam) nisi quod distinctionis gratiâ, species transversi lateris hic erit f, unde CEB rectanguli species erit $fe + e^2$. Est autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujusvis ordinatæ DE ut transversum latus ad rectum: in speciebus ergo, ut f ad b, ita $fe + e^2$ ad a^2. Ductis itaque extremis inter se, tum etiam mediis inter se, fiet æquatio universalis ad omnem hyperbolam pertinens.

Prima Æquatio.

$$bfe + be^2 \propto fa^2, \text{ sive } bfe + be^2 - fa^2 \propto 0.$$

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit b, & transversum f, existente a ordinatâ ad diametrum, e verò intercepta inter ordinatam & verticem, sive diameter sit axis, sive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex divisa DE in F, ita ut species rectæ DE sit

ſit $c+i$, talis erit, $bfe+be^2 \infty fc^2+2cfi+fi^2$, ſive $-fc^2+bfe+be^2-2cfi-fi^2 \infty o$.

Tertia Æquatio.

Tertia æquatio ex DE productâ in G vel H, ita ut ſpecies ipſius DE ſit $c-i$, vel $i-c$, talis erit $bfe+be^2 \infty fc^2-2cfi+fi^2$, ſive $-fc^2+bfe+be^2+2cfi-fi^2 \infty o$.

Poterit autem non tantùm recta BE, ſed etiam recta DE, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ naſcentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles eſſe poſſunt, curioſo Analyſtæ relinquimus.

Quarta Æquatio.

Speciatim verò reſumamus primam hyperbolæ æquationem, putà $bfe+be^2-fa^2 \infty o$, & ponamus tranſverſum latus f æquale eſſe lateri recto b, quod accidit in quacunque hyperbola cujus aſymptoti ſunt ad angulos rectos. Itaque diviſâ æquatione per f vel b, fiet hæc æquatio ſimplicior, $be+e^2-a^2 \infty o$, vel $fe+e^2-a^2 \infty o$.

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam rectangulam, cujus latus rectum erit b, ordinata a, ſive ad axem, ſive ad aliam quamcunque diametrum, & latus tranſverſum erit f æquale ipſi b, e autem erit quævis intercepta inter applicatam ſeu ordinatam & verticem.

At ex hac ſpeciali ac ſimplici æquatione multæ aliæ deduci poſſunt, ſi ſcilicet dividatur DE in F, vel ipſa DE producatur in G vel H, vel ſi BE dividatur in I, aut ipſa eadem BE producatur in K vel in L; vel rurſus, ſi utraque tam DE quàm BE dividatur aut producatur, vel denique multis aliis modis, pro majori & majori Analyſtæ ſagacitate.

bolarum ſpeciebus eam eligere quam libuerit: quo ſanè caſu præſtabit rectangulam aſſumere, propter illius majorem ſimplicitatem. Aliquando etiam ſectio ipſa ex hypotheſi data eſt, ſed rarò, putà cum beneficio analyſeos quæritur aliqua ejuſdem ſectionis proprietas, ut ſi quis ex dato puncto extra axem datæ ſectionis, minimam rectam quæ ad ipſam ſectionem duci poſſit inquirat, incidet ille in æquationem ſolidam quæ ſolvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi poſſit. Eligetur ergo ipſa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi exiſtimarent, ſi neglectâ ipsâ hyperbolâ datâ, aſſumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipſis, ut liberum eſt in omni æquatione ſolida; at hunc rigorem, ut elegantiorem concedimus, ſic non omnino neceſſarium exiſtimamus, propter rationes ſuprà allatas, cùm quid geometricum cenſeri debeat examinaremus.

Sexta Æquatio.

Iiſdem poſitis, ſunto hyperbolæ aſymptoti L N, L P ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta B R parallela uni aſymptoton L P, quæ B R occurrat alteri aſymptoton L N in puncto R. Itaque, ex hypotheſi quòd data ſit hyperbola, data quoque erit utraque L R, R B, unde & rectangulum ſub ipſis datum eſt, ſit ſpecies illius b^2. Tum ſumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta M N parallela cuivis aſymptoto, putà L P, occurenſque alteri L N in puncto N; atque ſpecies rectæ L N eſto a, ſpecies autem rectæ N M eſto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum ſub L R, R B æquale eſt rectangulo ſub L N, N M: dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria ſeu ſpecifica $b^2 \infty ae$, ſeu $b^2 - ae \infty 0$. TAB. XIII. Fig. 4.

Ex tali ergo æquatione ſemper hyperbolam concludere licebit,

 cujus

cujus b^2 erit rectangulum sub LR, RB, at a erit quævis portio unius asymptoton, putà LN ad centrum terminata, e verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei a extremum, quæ tamen recta e alteri asymptoto parallela existet, putà asymptoto LP existente e ipsâ rectâ MN.

Quòd si recta LN dividatur vel producatur, ut species illius si vel $c+i$, vel $c-i$, vel $i-c$, manente NM indivisâ; aut si hæc NM dividatur vel producatur, ut species illius sit $d+u$, vel $d-u$, vel $u-d$ manente LN indivisâ; aut si utraque LN, NM dividatur aut utraque producatur, aut denique altera earum dividatur, altera producatur: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.

Apparet quoque tales æquationes ad quamcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptoton datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato b^2, hyperbolæ ipsius speciem determinare possit.

Septima Æquatio.

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta POQ secans hyperbolam in O asymptotos autem in P & Q, atque illi PQ parallela existat TS tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptoton, putà LP in S; & data sit positione & magnitudine ipsa TS, cujus species sit b, ex hypothesi quòd hyperbola sit quoque data; sit etiam rectæ OP species a; rectæ verò OQ species esto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum POQ æquale est quadrato tangentis TS, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \infty ae$, seu $b^2 - ae \infty o$.

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ suprà in sexta concludere licebit, atque id tam divisis ipsis PO, OQ, quàm iisdem productis.

DE

DE ELLIPSI.

In ellipsi præcipuæ æquationes non multùm differunt a tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omnino autem, non alio modo se habet circulus ad ellipses, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio simplex fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum composita extitit, sic in circulo, prædictæ priores tres æquationes simplices fuere, quæ in genere ellipsium fient compositæ. At illud hic breviter exponamus.

Prima Æquatio.

Esto ellipsis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, sive illa sit axis sive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela sit AB; species autem ipsius AB esto b; ipsius BC, f; ipsius DE; a; ac tandem ipsius BE, e: unde rectanguli CEB species erit $fe - e^2$. At in omni ellipsi, ut diameter BC ad latus rectum AB ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in speciebus, ut f ad b, ita $fe - e^2$ ad a^2: hinc æquatio $bfe - be^2 \infty fa^2$, sive $bfe - be^2 - fa^2 \infty o$. Tab. XIII. Fig. 5.

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ nascentur æquationes inventu non admodum difficiles; sed id indicasse sufficiat.

Ex ejusmodi ergo æquationibus semper ellipsim concludere licebit, cujus latus rectum erit b, diameter f, ordinata ad diametrum a, vel quæcunque ipsam a in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit e, vel quæcunque ipsam e in æquatione referet. Immo, dabitur quoque ipsius ellipsis species, ex hypothesi quòd angulus ABC vel DEC datus sit; si tamen angulus ille rectus esset, & rectæ b & f æquales, loco ellipsis haberemus circulum: quod demonstrare non erit difficile.

 Se-

Secunda Æquatio.

Poteſt præmiſſa prima æquatio reddi ſimplicior, ſi fiat ut b ad f, ita a^2 ad u^2; unde $fa^2 \infty bu^2$. Itaque in æquatione illa, loco ipſius fa^2 ſuccedat illi æquale bu^2, ac tum $bfe - be^2 - bu^2 \infty o$: omnia applicentur ad b, fietque æquatio ſimplex $fe - e^2 - u^2 \infty o$.

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum, at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipſim, cujus diameter erit f, latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit u, (niſi latus rectum æquale ſit ipſi f diametro, & angulus DEC obliquus) ſed ut ipſa habeatur ordinata, fiet ut f ad latus rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocetur a^2, ac tum a erit ipſa ordinata; ex tali enim analogia fiet $fa^2 \infty bu^2$: at æquatio ſimplex erat $fe - e^2 - u^2 \infty o$, quâ in b ductâ, fit $bfe - be^2 - bu^2 \infty o$. Jam loco ipſius bu^2 ſuccedat ipſi æquale fa^2, & ſic tandem fiet prima ellipſis æquatio $bfe - be^2 - fa^2 \infty o$.

Ad prædictas æquationes reducentur quæcunque ſuprà ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, ſi ſpecies debitè atque ex arte permutentur, at iis conditionibus de quibus ſæpius ſuprà dictum eſt.

rollarium.

In omnibus præmiſſis æquationibus liquidò conſtat, quatuor curvas ex quibus illæ deductæ ſunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipſim ad ſuas diametros relatas eo modo quo ſuprà, non tranſcendere ſecundum gradum, hoc eſt quadratum incognitarum magnitudinum a, e, i, u, &c. Quòd ſi quis eaſdem ad alias rectas quàm ad ipſas diametros referat, ille rurſus in ſimiles, ſive ejuſdem gradus æquationes incidet; unde in univerſum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipſis quatuor cur-

A G D F B I E C H

Fig. 5.

Q N M A T H B I E K O P Fig. 3. F D G

T B A R L S C

G D F E H B

g. 2.

Roberval.

curvis ſemper concludere licebit: & hoc ſufficit ad omnia loca plana & ſolida Antiquorum invenienda & componenda; ſi tamen his æquationibus paucæ addantur quæ pertinent ad lineas rectas, dum illæ ad alias rectas referuntur, quæ ſanè æquationes ipſum eundem ſecundum gradum non excedunt; at verò ad hanc inventionem & compoſitionem requiritur Analyſta non vulgaris. Sed hoc etiam indicaſſe ſufficiat: nunc pauca de locis linearibus ad æquationes geometricas abſoluto modo revocatis ſuperſunt dicenda, quod nos in conchoïde Nicomedis tantùm exequemur, ſiquidem illa etiam in ſequentibus ad noſtrum inſtitutum ſatis erit, videturque eadem eſſe locorum omnium linearium ſimpliciſſimus.

DE CONCHOÏDE NICOMEDIS.

Etsi multa ſint linearum curvarum genera quæ in infinitas ſpecies multiplicentur, tamen hac in parte, conchoïdum genus omnia alia genera longiſſimè, immo infinities infinitè ſuperat. Siquidem nulla datur curva ex qua infinitæ conchoïdes deduci non poſſint, atque omnes ſpecie, immo etiam genere differentes; ac præterea, cujuſvis conchoïdis infinitæ rurſus dantur conchoïdes ſpecie ac genere inter ſe diſtinctæ, ita ut propoſitâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ, ſtatim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur, quæ quamquam genere inter ſe diſtinctæ, tamen omnes ſint primi cujuſdam ordinis; tum ex unaquaque illarum innumeræ rurſus aliæ naſcantur genere diverſæ, quæ omnes ſecundi cujuſdam ordinis exiſtant, ex quibus ſingulis eodem modo innumeræ tertii cujuſdam ordinis oriuntur; atque ita in infinitum infinities abit talis multiplicatio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duo tantùm ſeligere decrevimus, quæ quamquam ſimpliciſſima exiſtant, tamen illa per ſe ſingula ad æquationes analyticas quinti ac ſexti gradus, hoc eſt quadrato-cubicas ac cubo-cubicas ſolvendas ſufficiunt; ita ut beneficio cujuſvis illorum generum poſſit angulus quicunque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit

erit illud cujus conchoïdes vulgò vocantur a Nicomede earum inventore, suntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores scripsere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipse famosissimum problema de cubo duplicando solvere aggressus est, quamquam sanè modo non usque adeo legitimo, cùm tale problema ad lineas simpliciores, putà conicas, pertineat: solidum enim illud est tantùm, at conchoïdes omnes sunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum nostrarum erit parabolicarum, de quibus primus egisse putatur Renatus *des Cartes* in sua Geometria, qui etiam modo prorsus legitimo iisdem usus est ad problemata analytica sexti gradus solvenda, ad quem gradum illa quoque ascendere cogit quæ sunt quinti gradus; quod sanè ei liberum, at non omnino necesse fuit, sed modum quo aliter ab iis se expediret, aut non advertit, aut aliqua de causa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatu dignum accidit, quòd quamquam simplicius sit circulare quàm parabolicum, si linearum genitricium ratio habeatur, (simplicior enim est circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cùm ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolica simpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradus ad quem illæ ascendunt, qui in utraque suâ naturâ sextus est existente æquatione universali, sed ratione multiplicitatis affectionum, seu homogeneorum per signa + & — distinctorum; at illud magis in sequentibus patebit.

Cùm autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursus infrà clariùs innotescet.

Antequam ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

In

In universum ergo concipiatur quævis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, a qua conchoïs describenda denominabitur, planum verò postea vocabitur planum mobile: in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *albidadam* in permultis instrumentis; hanc postea vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundùm eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud postea motu lationis secundùm præscriptas leges aliquas deferetur. Præterea, in superficie immobili extra semitam, ultrà citráve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuò transeat, jaceatque interim semper in plano mobili.

His positis, si statuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis existat in semita, & regula per utrumque polum transeat, tum moveatur planum mobile secundùm certam quandam ac constitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pendet, modò postea illam inviolatam servet, polo mobili secundùm semitam delato, neque ab ea usquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem secat, ac per omnia illa sectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem potest, ac revera fit sæpissime, ut in una eademque

plani mobilis atque ideo lineæ genitricis positione, regula ipsam genitricem in duobus vel pluribus punctis secet; unde etiam accidit non rarò, ut conchoïs inde orta non sit unica linea continua, sed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ, nunquam sibi invicem occurrant; aliquando, e contrario, illæ partes se secent, & aliquando eædem se tangant tantùm: sed & illud fieri potest, ut aliqua positione, regula lineæ genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extensa, vel certè ipsa erit interrupta, non verò continua. Sed hæc indicasse sufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum descriptione.

TAB. XIV. In specie. Ponamus in aliqua ex tribus figuris Tab. 14., planum mobile esse illud in quo est circulus cujus diameter est CD vel GF; atque in eo plano lineam genitricem esse ejusdem circuli circumferentiam; polum mobilem esse ipsius centrum B vel E, & regulam esse rectam AB, vel AE. Ponamus deinde planum immobile esse id in quo est recta BE in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem sit semita perquam feratur polus mobilis B vel E, atque unà cum ipso planum mobile deferens circulum CD vel GF, polus verò immobilis in hoc plano immobili esto A, per quem transeat regula AB vel AE.

Manifestum est ergo, quòd dum centrum circuli, sive polus mobilis feretur secundùm semitam BE, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A semper transiens, positionem suam continuò mutabit. Jam lex motus esto, ut planum mobile semper inter movendum jaceat secundùm suam planitiem in plano immobili; hæc enim lex sola sufficit ad certam atque indubitatam descriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis positione, regula ipsam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, semper secat, quorum punctorum unum est ad unas partes semitæ versùs polum immobilem A, quale est punctum D vel G, alteram ad alteras partes ejusdem semitæ, quale est C vel

vel F: sit necessariò ut conchoïs circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utrasque partes semitæ BE existentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur sic ut semita utriusque asymptotos existat. Illæ lineæ in figuris his sunt CTF, DGS, quarum exterior CTF (exteriorem voco eam quæ respectu poli immobilis A jacet ad alteras partes semitæ BE) circa verticem C, ad aliquam distantiam ex utraque parte ipsius verticis, interiùs cava est versùs semitam BE: est autem vertex C punctum id in quo recta AB ad semitam BE perpendiculariter producta occurrit ipsi conchoïdi; at ultra talem distantiam mutatur cavitas ipsa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò respicit semitam usque in infinitum. At conchoïs interior DGS, præter id quod de exteriori jam diximus, quibusdam accidentibus obnoxia est, prout recta AB vel semidiametro DB major est, vel eidem æqualis, vel ipsâ major; existente enim AB majore quàm DB, idem accidit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum satis apparet; existentibus verò rectis AB, DB æqualibus, ut in secunda figura, tunc conchoïs interior ad punctum A vel D qui vertex est, angulum constituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut sic conchoïs ex duabus lineis ad verticem AD sese tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes semitæ BE semper convexa est usque in infinitum. Verùm, existente rectâ AB minore quàm DB, ut in tertia figura, tunc conchoïs inter puncta A, D ita involvitur, ut spatium comprehendat laquei instar, cujus funiculi postquam ad punctum A decussatim sese secuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes semitæ BE semper respiciat.

Sic ergo se habet conchoïs circularis Nicomedis. Quòd si polus mobilis non sit centrum circumferentiæ genitricis, sed quodvis aliud punctum in plano mobili assumptum: fient aliæ conchoïdes circulares a prædicta & a se invicem diversæ in infinitum, quod tamen indicasse sufficiat. Sed & semita poterit esse non

recta linea ut B E, verùm alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in ſupplemento Geometriæ, quamquam ſanè idem, ſicuti de Nicomede diximus, modo non uſque adeo legitimo quàm par fuerat uſus eſt, in ſolvendis ſcilicet problematis ſuâ naturâ ſolidis, cùm conchoïdes illæ ſint loci lineares. Sed hoc rurſus indicaſſe ſufficiat, ut inde poſſit quivis colligere quàm immenſa ſit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter ſe ſpecie differentium multitudo: nunc ad æquationes analyticas modo abſoluto, ipſam Nicomedeam rovocemus, ut protinus ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque in conchoïde exteriori C T F cujuſvis ex tribus figuris tab. 14. ſunto ſpecies:

A B	b,
B C, E F	c,
F H, B I	a,
F I, B H	e,

Et quoniam ut recta A I ad I F, ita eſt F H ad E H: crit in ſpeciebus, ut $b + a$ ad e, ita a ad $\frac{ae}{b+a}$

E H $\frac{ae}{b+a}$

E H quadratum $\frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$.

Ponitur autem triangulum E F H eſſe rectangulum. Hinc æqualitas in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

& omnibus in communem diviſorem ductis,

$$b^2 c^2 + 2bc^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 + 2ba^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 + 2bc^2 a \begin{matrix} + c^2 a^2 \\ - b^2 a^2 \end{matrix} - 2ba^3 - a^4 - a^2 e^2 \propto o:$$

unde ex tali æquatione ſub iiſdem ſpeciebus licebit pronuntiare ipſam æquationem ad conchoïdem circularem Nicomedis exteriorem pertinere.

Ne-

Neque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinaris differet æquatio, non quidem speciebus, sed specierum affectionibus secundùm signa + & —, idque in quibusdam affectionibus tantùm, ut ex formula sequenti apparet. Sunto ergo species:

A B esto	b,
BC, EF, EG	c,
GO, BP	a,
GP, BO	e,
Ut $b - a$ ad e, ita a ad	$\frac{ae}{b - a}$
OE	$\frac{ae}{b - a}$

OE quadratum $\frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$

Ponitur autem triangulum EOG esse rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe

$$c^2 \infty a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$$

& omnibus ductis in communem divisorem,

$$b^2 c^2 - 2b c^2 a + c^2 a^2 \infty b^2 a^2 - 2ba^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 - 2b c^2 a \begin{matrix} + c^2 a^2 \\ - b^2 a^2 \end{matrix} + 2ba^3 - a^4 - a^2 e^2 \infty o.$$

Itaque ex ejusmodi æquatione sub iisdem speciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porrò multis modis, immo innumeris, variari possunt magnitudines ignotæ a & e; quippe si altera earum vel ambæ datâ magnitudine audeantur vel minuantur, ut factum est suprà in circulo, parabola, hyperbola, & ellipsi. Finge enim productam esse HF in K, ita ut FK data sit sub specie d, HK autem in specie sit i: tum verò HF erit in speciebus $i - d$ quæ priùs erat a; unde loco speciei a & graduum ejus in æquatione, substitui poterunt $i - d$ & gradus ipsius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio a præmissis diversa, ac multò pluribus nominibus constans, quæ sub suis speciebus ad conchoïdem Nicomedis pertinebit. I-

dem etiam conludemus ſi FH producatur in L, & ipſius HL ſpecies ſit d, ipſius autem FL ſpecies ſit i, ſic enim rurſus HF erit in ſpecie $i - d$, &c. Quòd ſi iiſdem productis, HK vel FL data ſit ſub ſpecie d, & ipſius FK vel HL ſpecies ſit i, erit ipſius FH ſpecies $d + i$ quæ priùs erat a; unde, &c. ut ſuprà.

Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data eſſet ſub ſpecie d, altera FV ignota ſub ſpecie i; atque ita ipſius HF ſpecies fuiſſet $d + i$ quæ priùs erat a; unde, &c. ut ſuprà.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicaſſe ſufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifeſtum eſt.

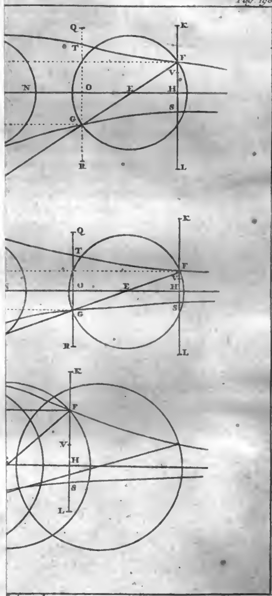
Infinitos modos relinquimus, quia prædictos ſufficere putavimus, ad hoc ut quivis ſuopte ingenio quotvis alios ut libuerit, inquirat, & analyticè proſequatur.

Appendix ad Iſagogen topicam continens ſolutionem Problematum ſolidorum per locos.

PATUIT methodus quâ lineæ locales deteguntur: inquirendum reſtat quâ ratione Problematum ſolidorum ſolutio poſſit ex ſupradictis elegantiſſimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites ſuos evagandi licentia. Infinita enim ſunt puncta quibus quæſtioni propoſitæ ſatisfit in locis: commodiſſimè igitur per duas æqualitates locales quæſtio determinatur, ſecant quippe ſe invicem duæ lineæ locales poſitione datæ, & punctum ſectionis poſitione datum quæſtionem ex infinito ad terminos præſcriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur a cubus $+ b$ in a quadratum æquari z plano in b.

Com-


Q
T
F
K
V
N
O
E
H
S
G
R
L
Q
K
T
F
V
O
E
H
G
S
R
L
K
F
V
H
S
L
Roberval.

Commodè utraque æqualitatis pars poteſt æquari ſolido b in a in e, ut per diviſionem iſtius ſolidi, illinc per a, hinc per b res deducatur ad locos. Cùm igitur a cubus $+$ b in a quadratum æquetur b in a in e; ergo $a^q + b$ in a æquabitur b in e:

Et erit, ut patet ex noſtra methodo, extremitas ipſius e ad parabolam poſitione datam.

Deinde cùm z^p in b æquetur b in a in e, ergo z^p æquabitur a in e.

Et erit ex noſtra methodo extremitas ipſius e ad hyperbolam poſitione datam. Sed jam probavimus eſſe ad parabolam poſitione datam. Ergo datur poſitione, & eſt facilis ab analyſi ad ſyntheſin regreſſus.

Nec diſſimilis eſt methodus in omnibus æquationibus cubicis. Conſtitutis enim ex una parte ſolidis omnibus ab a adfectis, ex alterâ ſolido omnino dato, vel etiam cum ſolidis ab a vel a^q affectis, poterit fingi æqualitas ſuperiori ſimilis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum. $a^{qq} + b^f$ in $a + z^p$ in $a^q \infty d^{pp}$: ergo $a^{qq} \infty d^{pp} - b^f$ in $a - z^q$ in a^q æquentur hæc duo homogenea z^q in e^q.

Cùm igitur a^{qq} æquetur z^q in e^q: ergo per ſubdiviſionem quadraticam, a^q æquabitur z in e, & erit extremitas E ad parabolam poſitione datam.

Deinde cùm $d^{pp} - b^f$ in $a - z^q$ in $a^q \infty z^q$ in e^q, omnibus per z^q diviſis,

$$\frac{d^{pp} - b^f \text{ in } a}{z^q} - a^q \infty e^q.$$

Et erit ex noſtra methodo extremitas E ad circulum poſitione datum; ſed eſt & ad parabolam poſitione datam: ergo datur.

Non diſſimili methodo ſolventur quæſtiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione ſub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte,

parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet a cubus ∞ b^q in d, posito nempe quòd major mediarum ponatur a.

Æquentur singula homogenea b in a in e.

Illinc fiet a^q ∞ b in e.

Istinc a in e ∞ b in d.

Ideoque quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

TAB. XV. Fig. 1. Exponatur enim recta quævis positione data OVN in qua detur punctum O. Sint rectæ datæ B & D inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta OV æquari a, & recta VM ipsi OV ad rectos angulos æquari e. Ex priori æqualitate, qua a^q æquatur b in e, constat per punctum O tanquam verticem, describendam parabolam cujus rectum latus sit b, diameter ipsi VM parallela & applicatæ ipsi OV: transibit igitur hæc parabola per punctum M.

Ex secunda æqualitate quâ b in d æquatur a in e, sumatur punctum ubilibet in recta OV, ut N, a quo excitetur perpendicularis NZ, & fiat rectangulum ONZ æquale rectangulo b in d. Excitetur perpendicularis OR. Circa asymptotos RO, OV describenda hyperbola per punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M. Sed parabola etiam quam suprà descripsimus datur positione, & per idem punctum M transit: datur igitur punctum M positione, a quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, & recta OV major duarum continuè proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæstionem extendere, omnia du-

ducantur in a, tunc a^{qq} æquabitur b^{q} in d in a.

Æquentur fingula homogenea juxta fuperiorem methodum b^{q} in e^{q}.

Fient duæ æqualitates, nempe a^{q} & b in e,

Et d in a & e^{q}.

Quæ fingulæ dabunt parabolam pofitione datam. Fiet igitur conftructio mefolabii per interfectionem duarum parabolarum hoc cafu.

Prior conftructio & pofterior funt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facillimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ paraplerofes Vietæ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana; pari enim elegantiâ, facilitate & brevitate folvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæftiones, nec poffunt, opinor, elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en conftructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur $a^{qq} + z^{f}$ in $a \infty d^{pp}$: ergo $a^{qq} \infty - z^{f}$ in $a + d^{pp}$. Fingatur quadratum abs $a^{q} - b^{q}$, aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum $a^{qq} + b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis. Addantur ad fupplementum fingulis æqualitatis partibus $b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis: fiet $a^{qq} + b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis $\infty\, b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis $- z^{f}$ in $a + d^{pp}$; fit b^{q} bis $\infty\, n^{q}$, & fingulis homogeneis five partibus æqualitatis æquetur n^{q} in e^{q}: fiet illinc per fubdivifionem quadraticam $a^{q} - b^{q} \infty\, n$ in e; ideoque punctum extremum e erit ad parabolam ex noftra methodo: ifthinc fiet,

$$\frac{b^{qq}}{n^{q}} - a^{q} - \frac{z^{f} \text{ in } a + d^{pp}}{n^{q}} \infty\, e^{q}$$

Ideoque ex noftra methodo, punctum extremum e erit ad circulum. Defcriptione igitur parabolæ & circuli folvitur quæftio.

 Hæc

Hæc methodus facillimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum est tantùm ut ex una parte sit a^{qq}; ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab a cubo. At per expurgationem Vietæam omnes æquationes quadrato-quadraticæ ab affectione sub cubo liberantur: ergo eadem in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab adfectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in a ductis, fiet æquatio quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis afficiectur sub cubo; ideoque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut a^q ex una parte, ex altera e^q sub contraria affectionis nota reperiatur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, $a^{qq} \infty z^p$ in $a^q - z^s$ in d. Fingatur quodvis quadratum abs $a^q -$ quovis quadrato ut b^q, fiet $a^{qq} + b^{qq} - b^q$ in a^q bis. Adjiciatur utrinque æqualitatis parti ad supplementum $b^{qq} - b^q$ in a^q bis fiet $a^{qq} + b^{qq} - b^q$ in a^q bis ∞ $b^{qq} - b^q$ in a^q bis $+ z^p$ in $a^q - z^s$ in d.

Ut igitur commoda fiat divisio in secunda æqualitate, sumenda differentia inter b^q bis & z^p quæ sit verbi gratiâ n^q, & utraque æqualitatis pars æquanda n_q in e^q.

Ut illinc fiat $a^q - b^q \infty n$ in e.

$$\text{Isthinc } \frac{b^{qq}}{n^q} - a^q - \frac{z^s}{n^q} \text{ in } d \infty e^q.$$

Advertendum deinde b^q bis debere præstare z_p, alioquin a^q non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui promptum remedium; b^q enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus z^p nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo

gno $+$; in altera aliud quadratum ignotum ſigno —.

Si ſumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit $a^{c} \infty b^{q}$ in d.

Et $a^{qq} \infty b^{q}$ in d in a.

Adjiciatur utrinque $b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis.

$a^{qq} + b^{qq} - b^{q}$ in a^{q} bis, æquabitur $b^{qq} + b^{q}$ in d in $a - b^{q}$ in a^{q} bis.

Sit b^{q} bis ∞n^{q}.

Et ſingulæ æqualitatis partes æquentur n^{q} in e^{q}

Fiet illinc $a^{q} - b^{q} \infty n$ in e.

Ideoque extremum e erit ad parabolam.

Iſthinc fiet $b^{q}\frac{1}{2} + d\frac{1}{2}$ in $a - a^{q} \infty e^{q}$; ideoque extremum e erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, fruſtra quæſtionem meſolabii, triſectionis angularis, & ſimiles tentabit deducere ex planis, hoc eſt per rectas & circulos expedire.



TRAITÉ DES INDIVISIBLES

PAR

M. DE ROBERVAL.

TRAITÉ

DES

INDIVISIBLES.


OUR tirer des conclusions par le moyen des indivisibles; il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour costé la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendroit le quarré qui auroit 4 de costé comme le triangle; & encore qu'il ne fallust pas 10 points pour achever le quarré, parce que le coste AB seroit commun à l'autre moitié du quarrré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considerable, parce que le triangle n'excede jamais la moitié du quarré que de la moitié de son costé: or y ayant une infinité de costez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en consideration; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de costé n'excéde la moitié du quarré collatéral, (c'est-à-dire

PLANC. XV. Fig. 2.

à-dire qui a pareil costé) que de 2 qui est $\frac{1}{4}$ de ladite moitié, ou la moitié du costé. Si le triangle avoit 5 de costé, il n'excéderoit que de $\frac{1}{5}$ de la moitié du quarré collatéral: s'il en a 6, il n'excédera que de $\frac{1}{6}$, & ainsi de suite; & puis qu'on voit que l'excés diminuë toûjours, il s'anéantria enfin dans la division indefinie.

De mesme si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la derniére prise autant de fois comme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3; car quoy-que prenant un nombre fini de quarrez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers; car ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube que de la moitié du plus grand quarré + $\frac{1}{6}$ du costé. Or dans le cube il y a une infinité de quarrez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou costé du mesme cube.

Ainsi le cube estant 64, pour avoir la somme des quarrez dont le plus grand soit collatéral audit cube, on prendra le tiers d'iceluy, sçavoir $21\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura $29\frac{1}{3}$, à quoy joignant encore $\frac{1}{6}$ de 4 qui est le costé, sçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarrez. Et ainsi par les proprietez des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collatéral au plus grand cube; que la somme des quarrez-quarrez est $\frac{1}{5}$ de la cinquiéme puissance; que la somme des cinquiémes puissances est $\frac{1}{6}$ de la sixiéme puissance, & ainsi des autres. Mais il faut remarquer que les puissances ont ainsi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point si on en omet une entre deux. Ainsi la ligne ou costé n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquiême puissance, &c. car les lignes prises à l'infini ne faisant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrez dans le cube, si l'on ajouste ou si l'on

l'on oste un seul quarré cela n'opérera rien. La mesme chose se montrera du quarré eû egard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquiéme puissance, &c.

La superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles ou sont égales, ou ont égale différence, ou gardent entr'elles quelqu'autre progression, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les superficies sont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les superficies, on comparera les lignes à une autre chose, & la somme de toutes les petites surfaces ou des lignes qui les représentent, sont à la grande surface prise autant de fois comme 1. à 3, comme il a esté dit.

De mesme les solides se divisent en une infinité de petits solides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a esté dit des surfaces: & d'autant que les solides sont terminez par des surfaces, au lieu de dire que ces petits solides sont au grand solide pris autant de fois, je dis, l'infinité des surfaces sont à la plus grande prise autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de son costé, ou comme 1. à 4.

Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, & compose la ligne entiére. L'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS posons que le diamétre AB du cercle AEFGB se meut parallelement à soy-mesme, comme s'il estoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonféren- PLANC. XV. Fig. 3.

 ce

ce du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, en forte que quand le diamétre eft en CD, le point A eft venu en B, & la ligne AC fe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courfe du diamétre fe divife en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle fe divife auffi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a efté dit. En aprés je confidére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un du diamétre en avant, l'autre du fien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eft venu en E il eft élevé audeffus de fon premier lieu duquel il eft parti; cette hauteur fe marque tirant du point E au diamétre AB un finus E1, & le finus Verfe A1 eft la hauteur dudit A quand il eft venu en E. De mefme quand il eft venu en F, du point F fur AB je tire le finus F2, & A2 fera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le finus G3, le finus Verfe A3 fera la hauteur de A quand il eft parvenu en G; & faifant ainfi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes fes hauteurs & élevemens pardeffus l'extrémité du diamétre A, qui font A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où paffe ledit point A, & fçavoir la ligne qu'il forme pendant fes deux mouvemens, je porte toutes fes hauteurs fur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 font les mefmes que celles qui font prifes fur AB. Puis je prends les mefmes finus E1, F2, G3, &c. & je les porte fur chaque hauteur trouvée fur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces finus fe forment deux lignes, dont l'une eft A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je fçay comme s'eft fait la ligne A 8 9 D: mais pour fçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A eft monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier efpace pen-

pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en CD; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, estant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez A, D. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'iceluy; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des sinus E 1, B 2, &c. qui sont les mesmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelogramme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant, selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoustant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 D C; & faisant de mesme pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considére ensuite le mouvement que nous avons donné à nostre point emporté par le diamétre marchant parallelement à soy-mesme. Tirant du mesme point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre costez égaux lors que le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & si du mesme point je tire la diagonale, j'ay la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit

posez en quelqu'autre raison, comme si lors que l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le mesme temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

PROPORTION

de la circonférence du cercle à son diamétre.

PLANC. XV. Fig. 4.

SOIT le cercle AIBQ, son diamétre AB, & soient tirez les sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD soient égaux: je dis que la ligne EF est à la circonférence CD, comme tous les sinus ensemble, sçavoir CE, GV & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demidiamétres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N, GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant. Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je fais des triangles semblables, ausquels triangles semblables les lignes DF & NE ne sont point employées, mais cela n'importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par aprés la ligne B8 faisant l'arc 8A égal à CG; & du point 8 j'abaisse la perpendiculaire 8A pour avoir un triangle semblable aux triangles C2E, G3V, & aux autres suivans. Nous feignons que la circonférence CD est divisée par infinis sinus, & que la ligne 8A estant si proche de la circonférence 8A, devient elle-mesme circonférence & égale à 8A, ou à CG, & à chacune des autres qui ont esté divisées en infini. De plus, nous disons que la ligne B8 peut estre tant aprochée par une division infinie de la ligne AB diamétre, qu'elle devient elle-mesme diamétre.

Puis on dira: Comme CE est à E2, ainsi OV est à V2, & ainsi de tous les triangles qui suivent la mesme régle. En aprés, le triangle CE2 est semblable au triangle GV3, parce qu'ils ont les

les angles C & G égaux, soûtenant circonférences égales NO, OP, car toutes sont égales depuis N jusques en T, & partant comme tous les doubles sinus CN & autres sont à la ligne EF, ainsi CE à E 2: or comme CE à E 2, ainsi B 8, qui est devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence, qui sera égale à CG & aux autres. Ainsi, comme tous les sinus à la ligne EF, ainsi le diamétre B 8 devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence; & au lieu de dire 8 A, je dis CG; & coupant les antécédens en deux, je dis, comme les sinus d'enhaut à la ligne EF, ainsi le demi-diamétre ou sinus total à CG; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de divisions, tous les sinus d'enhaut seront à EF, comme autant de demi-diamétres ou sinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C jusques en D, sont à la circonférence CD: &changeant, comme tous les sinus d'enhaut sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres, ainsi la ligne EF est à la circonférence CD.

Que si la ligne EF avoit esté le demi-diamétre, & que les sinus eussent esté abbaissez du quart de la circonférence, le demi-diametre eust esté au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres.

FIGURE COURBE

égale au Quarré.

SUPPOSANT que le demi-diamétre du cercle est au quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux: je trouve que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posez à angles droits sur la circonférence; car en la figure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui sont les sinus de toute la circonférence BC, sont par l'extré- PLANC. XVI. Fig. 1.

 mité-

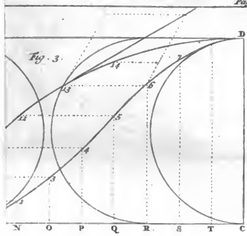
mité de leur sommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus en sorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamétre, ils forment la figure ABCD. Je fais aussi sur AB son quarré ABEF.

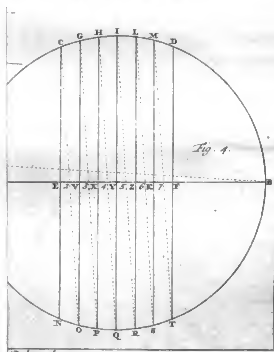
Puis je dis: Comme le demi-diamétre AB est à la circonférence BC, c'est-à-dire au quart de la circonférence, ainsi tous les sinus sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres; & par les infinis, comme la figure ABC sera à la figure ABCD composée des infinis sinus totaux & du quart de la circonférence BC; donc, comme le demi-diamétre est à la circonférence, ainsi la figure ABC est à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB est à la ligne BC, ainsi le quarré d'icelle est au rectangle fait de AB & BC; donc la figure ABC est à la grande ABCD comme le quarré ABEF est au rectangle ABCD; ainsi le quarré de AB a mesme raison au rectangle AC que la figure ABC; & partant le quarré de AB qui est ABFE est égal à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

PLANC. XVI. Fig. 2.

SOIT la Parabole BALMNOPC, le sommet A, le diamétre AB, la ligne touchante AD, laquelle soit divisée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points soient tirées les lignes paralleles au diamétre AB jusques à la ligne CB, sçavoir E1, F2, G3, &c. & des points où lesdites lignes coupent la Parabole, soient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR sont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR; & la ligne AR est à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainsi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD estant divisée en parties égales, & les parties d'icelles estant égales aux lignes ordonnées, sçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'ensuit que chaque





Roberval.

que quarré d'icelles lignes surpassera le précédent selon la progression des nombres impairs; que les quarrez seront faits des costez differens toûjours de l'unité, & que le costé du premier estant 1, les autres costez seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamétre comprises & coupées par les ordonnées sont les mesmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36 sont entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarrez (suivant l'ordre que j'ay dit, c'est-à-dire, à commencer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son costé, c'est-à-dire, par son costé; c'est faire un cube: il est donc vray que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, comme la somme des quarrez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarrez, partant le triligne CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA sera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB; ce qui a esté démontré par Archiméde d'une autre maniére.

Que si nous voulons considérer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamétre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la mesme Parabole que dessus, ou plûtost le dehors d'icelle COAD, sera au rectangle ABCD comme la somme des cubes à un quarré-quarré, c'est-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamétre, c'est-à-dire, les petites lignes, EL, FM, GN, HO, IP, DC sont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il se trouvera que la somme de toutes ces lignes seront

seront à la ligne CD prise autant de fois, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'est-à-dire, comme 1 à 5, & par ainsi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5; & de cette sorte on pourra continuër & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela se peut faire de toutes les puissances jusques où on voudra.

Quant au solide de nostre Parabole, il se fait en feignant que tout le rectangle tourne sur son axe, & qu'il se fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la premiére partie EAB1 se peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres se nomme Rouleau, parce que nous les devons considérer chacune à part, & cecy est pour les grands cylindres; mais en considérant les petits, comme la révolution que fait EAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui est au dedans de la Parabole, & ne considérons que ce qui est dehors; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui sont dans la Parabole ne peuvent faire une partie aussi grande que fait le rouleau DI5C; & par ainsi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'est de nulle considération dans les indivisibles.

Et par les petites lignes, c'est-à-dire par les portions du diamétre, nous considérons l'espace qui est hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme leurs cercles; mais les cercles sont entr'eux comme le quarré du demi-diamétre de l'un au quarré du demi-diamétre de l'autre: comme en nostre figure le quarré de la ligne AE est au quarré de AF comme le premier quarré au second quarré, & le quarré de AF est à celuy de AG comme le second quarré au troisiéme, &c. Mais un quarré surpasse son prochain de deux fois son costé, sçavoir le costé du moindre quarré, plus l'unité: il arrive donc que toutes les lignes, sçavoir AE, EF, FG, GH, HI, ID sont toutes différentes des quarrez, c'est-à-dire, chacune prise deux fois plus l'unité; or toutes ces unitez ne se

se considérent point dans les indivisibles comme chose finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un costé chacune, puis aprés nous disons que les petites lignes EL, FM, GN, & les autres sont entr'elles comme des quarrez; nous les considérons comme des quarrez, & disons que l'espace ELQ vaut deux costez d'un quarré par son quarré EL, & le quarré de FM par le double de son costé FA fait l'espace FMR, & pareillement le quarré de GN par deux GA fait l'espace GNS, &c. Or un quarré par deux fois son costé vaut deux fois le cube; donc toutes ces petites lignes ensemble, ou l'espace qu'elles contiennent hors la parabole sont comme deux fois la somme des cubes au quarré de CD pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du mesme CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considérer ABCD, ou la Parabole CPOMAB se tournant sur son axe comme la précédente, mais avec cette différence, que la ligne AB est divisée en parties égales entr'elles. Nous considérons le solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle duquel le demidiamétre est la ligne DA, les petits cylindres ont pour demi-diamétre de leurs cercles les lignes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs demi-diamétres: or les quarrez de ces petites lignes sont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, sçavoir en égale différence de l'unité, c'est-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes sont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainsi le quarré de LQ estant 1, celuy de MR vaudra 2, celuy de NS vaudra 3, celuy de OT vaudra 4, & celuy de RV vaudra 5. Or les cylindres estant entr'eux comme les quarrez des demi-diamétres de leurs bases ou cercles, il s'ensuit que tous les quarrez de ces petites lignes sont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la somme de la suite des nombres naturels, à commencer à l'unité, sont au quarré du dernier. PLANC. XVI. Fig. 3.

Mais le conoïde parabolique, c'est-à-dire, le solide fait par la révolution de CNLAB, est au cylindre total, sçavoir à celuy qui est fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande prise autant de fois; partant le conoïde parabolique est au cylindre, comme la somme des nombres, c'est-à-dire le triangle, est au quarré, ou bien comme la moitié à son tout; car la somme des nombres est au quarré (en terme d'indivisible) comme la moitié au tout; comme si la somme est 10 triangle de 4, le quarré est 16, dont la moitié 8 est excédée de 2 par le dit triangle. Or cela passe pour estre la moitié de l'autre; car si on continuoit dans la suite des nombres on verroit que le triangle excéderoit toûjours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

PLANC. XVI. Fig. 2. Maintenant il faut considerer la figure ABCD comme faisant son tour sur AD, lors la ligne CD sera le demi-diamétre de la base ou cercle du cylindre total: les lignes PI, OH, NG, MF, LE sont les demi-diamétres du cercle ou base de chacun de leurs cylindres. Or par la propriéte de la Parabole, la ligne EL est à FM comme le quarré au quarré, & ainsi toutes les autres petites lignes de suite; partant le quarré de EL sera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré quarré, & ainsi toutes les autres petites; donc toutes ensemble elles seront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes, c'est-à-dire, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube; & telle est la raison du solide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB, c'est-à-dire, qu'ils sont entr'eux comme 1 à 5.

PLANC. XVI. Fig. 3. Maintenant nous considérons que la figure tourne sur la ligne CD parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne AD est le demi-diamétre de la base ou cercle du grand cylindre; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P sont chacune le demi-diamétre du cercle ou base de leur cylindre qui sont l'une à l'autre comme leursdites bases ou cercles, & les cercles sont entr'eux comme les quar-

rez desdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes seront au quarré de la grande ligne prise autant de fois, comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raison des petits quarrez aux grands quarrez, laquelle je cherche par une grandeur qui leur soit égale, & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de QL moins le rectangle de Q 10 QL pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9, & celuy de MR moins le rectangle de 9RM pris deux fois, & ainsi des autres jusques à l'infini. Or faisant la comparaison, nous disons que les quarrez de Q10 & QL comparez au seul quarré Q10 font égalité de raison entre les deux grands qui sont égaux : le mesme soit entendu de tous les autres quarrez. Les grands estants égaux, il ne reste qu'à connoistre la valeur des petits LQ, MR, &c. Mais nous avons veû cy-devant qu'ils sont au grand quarré comme la moitié au tout : si donc nous joignons un tout avec sa moitié, & le comparons à un autre tout, nous ferons une raison de 3 à 2. Posons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui est composé du grand & de sa moitié vaudra 3 ; partant la raison sera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2 ; & poursuivant, on ostera ce qui estoit de trop dans les deux quarrez mis cy-dessus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q10 QL estoit de trop pardessus le quarré L 10, & ainsi des autres ; il faut donc oster les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour mesme hauteur Q10, donc ils seront entr'eux comme leurs bases ou petites lignes, & les solides entr'eux comme leurs bases. Mais nous avons veû que ce solide fait par le tour de la parabole estoit le tiers du cylindre total : or il faut oster deux fois le rectangle, partant il faudra diminuër de deux tiers la raison que nous avons trouvée de 3 à 2, & metant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{9}{6}$ on en ostera $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$, & restera $\frac{5}{6}$ pour la valeur de CAB tourné sur DC, & le reste au cylindre entier, sçavoir CAD, vaudra $\frac{1}{6}$ du grand cylindre ABCD.

DE LA CONCHOÏDE.

PLANC. XVI. Fig. 4.

LA Conchoïde se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une mesme ligne soit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle CGBR divisé (selon la regle des indivisibles) en parties infinies égales, & par iceluy a esté composée la Conchoïde 19 C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle jusques à ladite Conchoïde sont toutes égales. Or toutes ces lignes qui divisent la circonférence du cercle commençant au point C & finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divisent tant la conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoy-que dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de CB. En aprés, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarrez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarrez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarrez de CB, B 1, plus le rectangle deux fois sous CB B 1; le quarré C 19 est égal aux quarrez de CB, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonférence du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit estre égale à B 1 qui part de la mesme circonférence, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarrez CB, B 1 à deux fois le quarré CB, & prenant

la

la moitié, le quarré CB + le quarré B 1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrez CB, B 1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi-cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré CB + le quarré 20 21 sont au quarré CB: ainsi l'espace du cercle & demi-cercle ensemble sont à l'espace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde est au cercle comme le quarré CB + le quarré B 1 ou leurs secteurs, est au quarré C B; par ainsi, toute la Conchoïde est au cercle en mesme raison que le cercle & demi-cercle est au mesme cercle; & partant la Conchoïde est égale au cercle & demi-cercle pris ensemble.

Conchoïde.

Soit la base d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre est A; le sommet du cône est en l'air, avec telle obliquité, que de ce sommet la perpendiculaire tombe sur le point N. Nous supposons par les indivisibles, que par tous les points du cercle soient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous disons que si du sommet du cône on tire une perpendiculaire sur chacune de ces touchantes, & que si du point N sur lequel tombe la perpendiculaire tirée du sommet, on tire une ligne à ce mesme point de la touchante, l'angle sera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui passe par l'extrémité de chacune desdites touchantes & où se fait le susdit angle droit, sçavoir la ligne BHILNMC, se trouve estre une Conchoïde. PLANC. XVI. Fig. 5.

Pour le prouver, il faut construire un cercle qui ait pour dia-

métre NA, lequel cercle soit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes comprises entre sa circonférence APNR & la ligne BHILNMC, sont toutes égales entr'elles; nous prouvons que AOHD est un parallelogramme; car l'angle D est droit, puis que DH est touchante & AD demi-diamétre; l'angle H est aussi droit pour avoir esté tiré tel du point N sur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du sommet du cône; l'angle O est droit pour estre fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quartiéme OAD le sera aussi; & partant c'est un parallelogramme, & les costez opposez sont égaux; & par ainsi AD sera égale à OH comprise entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD est égale à AB pour estre toutes deux le rayon d'un mesme cercle. Passons outre, & considérons PIEA. L'angle E est droit, estant fait par la touchante; l'angle I est droit ayant esté fait tel par la ligne NI; l'angle P est droit, comme estant fait dans le demi-cercle, & partant le quatriéme l'est aussi, & les costez opposez du parallelogramme, sçavoir PI & AE ou son égale OH, sont égaux; & partant AB, OH, PI sont égales, & ce sont les lignes comprises entre les deux circonférences, sçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le mesme de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe est une Conchoïde.

DES ANNEAUX.

Si on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cét éxemple) & qu'on fasse tourner le tout sur un des costez du parallelogramme, le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure.

PLANC. XVI. Fig. 6.

Nous expliquerons cecy par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme EFHG: au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au costé FH du parallelogramme; la nature de

de cette ligne doit estre telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne FH, dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre, & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus*, c'est-à-dire, qu'il se diminuë peu à peu en sorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui estant remplis au grand solide sont de plus en iceluy qu'au petit; il faut donc tirer lesdits vuides du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit, & tout se mesure par les quarrez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, je considére que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution, & que le demi-cercle fait une figure différente de ce cylindre, de ces petits espaces qu'il faut oster du cylindre. Considérant les quarrez du cylindre, je dis que le quarré de IS est égal aux quarrez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12; le quarré TK est égal aux deux quarrez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T; le mesme se doit entendre des autres quarrez appartenant au cylindre AFHB. Mais si nous ostons chaque quarré qui compose le vuide, & qui sont hors le cercle de chacun des quarrez du solide, il nous restera tout le dedans du cercle, c'est-à-dire, du petit solide. Si donc du quarré SI on oste le quarré S 12, il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I: cecy est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13, il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ay de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle S 12 I, je joints le quarré avec une fois le rectangle, & par là j'ay le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considére ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la mesme ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarrez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils sur-

ſurpaſſent les petits quarrez I 8, K 9, & les autres qui ſont dans le demi-cercle, & je dis ainſi : Le quarré S 8 eſt égal aux deux quarrez S I, I 8 plus deux fois le rectangle S I 8 ; le quarré T 9 eſt égal aux quarrez T K, K 9 plus deux fois le rectangle T K 9, & ainſi des autres. Or il faut oſter de tous ces quarrez les quarrez du cylindre, ſçavoir de S I, T K, & autres, & nous aurons de reſte le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle S I 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle T K 9, & ainſi des autres, & cecy ſe doit joindre à l'autre eſpace du demi-cercle.

Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reſte à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle S I 12 que j'avois déja une fois, & partant je l'ay deux fois. Au ſecond demi-cercle, les quarrez 8 I, 9 K eſtant oſtez, il m'eſt reſté deux fois le rectangle S I 8 qui eſt le meſme que le précédent, & par ainſi j'auray quatre fois le rectangle S I 8 ; donc quatre fois ce rectangle ſera au quarré de S O, comme le ſolide de l'anneau eſt au cylindre total ; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou coſtez du rectangle, & je dis que le rectangle tout ſeul S O par 8 12 eſt au quarré S O, comme le ſolide de l'anneau eſt au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini ſont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total ; ils ſeront donc entr'eux comme leurs baſes ou lignes, c'eſt-à-dire, comme l'eſpace de ces lignes compriſes dans le cercle eſt à l'eſpace des grandes lignes qui compoſent le parallelogramme : donc comme le ſolide au cylindre, ainſi le plan du ſolide eſt au parallelogramme ; ce qu'il falloit prouver.

Nous trouverons la meſme choſe en faiſant tourner toute la figure ſur la ligne Y Z. Il faut premiérement éxaminer ce que fait A B Z Y par ſa révolution, & ce qu'il diffère d'avec A B H F. Le quarré Z B vaut les quarrez de Z H & H B plus deux fois le rectangle Z H B ; le quarré 7 N eſt égal aux quarrez 7 X, X N plus deux fois le rectangle 7 X N, & ainſi de chacun des autres grands quarrez. Il en faut oſter tous les quarrez qui compoſent l'eſpace H Y, ſça-

sçavoir le quarré FY, S3, T4, & les autres, lesquels estant ostez, resteront le quarré S I plus deux fois le rectangle 3 S I, & le quarré de T K plus deux fois le rectangle 4 T K; prenant le quarré S I, & le joignant à l'un des rectangles, je feray le rectangle 3 I S, & le rectangle 3 S I; puis a 4 T, si on joint le quarré de K T à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4 K T, & le rectangle 4 T K. Il faut retenir tout cecy, & passer à la considération du solide qui se fait par la révolution de A B G E tournant sur la mesme Y Z. Nous disons que le quarré de 3 O est égal aux deux quarrez de 3 I & I O plus deux fois le rectangle 3 I O; que le quarré 4 P vaut les quarrez de 4 K, K P plus deux fois le rectangle 4 K P, & ainsi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut oster tous les quarrez qui remplissent l'espace A B Z Y, sçavoir les quarrez 3 I, 4 K, 5 L, & les autres; & partant il reste le quarré O I plus deux fois le rectangle 3 I O; & ajoustant au rectangle 3 S I qui estoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré O I, je feray le rectangle 3 I O; & par ainsi dans le précédent cylindre j'auray deux fois le rectangle 3 I S; & dans ce dernier, le quarré O I estant osté, il reste deux fois le rectangle 3 I O qui est le mesme que 3 I S; partant le tout ensemble sera quatre fois le rectangle 3 I O; partant le quadruple du rectangle 3 I O sera au quarré de E Y, comme le cylindre, ou plûtost le rouleau G E F H est au cylindre total E G Z Y.

Il faut maintenant considérer ce que fait le cercle par sa révolution, tournant sur la mesme ligne Y Z, & le comparant au cylindre total; ce qui se doit faire en considérant une portion, sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premiérement la moitié A 12 15 B, & dirons: Le quarré de 3 I vaut les quarrez 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I; le quarré de 4 K vaut les quarrez 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainsi des autres. De cette équation il faut oster les quarrez 3 12, 4 13, & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajouste le quarré I 12, & je fais le

 rectan-

rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajouste pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K, & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K; ce qu'il faut retenir afin de l'ajouster à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarrez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8; le quarré 4 9 vaut les quarrez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajouster tout cecy à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I; & ajoustant au rectangle 3 12 I le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ay le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ay trouvé en la discussion de la seconde moitié (les vuides estant ostez, c'est-à-dire, les quarrez de I 3, K 4, &c.) le quarré 8 I (que j'ay ajousté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le mesme que 3 I 12; tellement que j'ay quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de E Y comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur Y Z, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au mesme quarré E Y comme le solide du cercle est au cylindre total fait par E G Z Y.

Il faut considérer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré E Y, ainsi le rouleau E G H F au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 I O trouvé dans le rouleau G F, est au grand quarré E Y, comme le mesme rouleau G F au grand cylindre G Y. En suite j'ay quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand quarré E Y, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est conséquent en l'une & en l'autre des comparaisons; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux: mais les rectangles sont tous d'égale hauteur; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau: or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent

l'espa-

l'espace de chaque figure ; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF ; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considérons si les solides sont égaux ou non. Je parleray premiérement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH : sa base est un cercle qui a pour demi-diamétre la ligne GH ; sa hauteur est la ligne HF : au lieu du cercle je prens ce qui luy est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diamétre pour un costé, & la moitié de la circonférence pour l'autre ; & par ainsi j'ay trois costez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je prétens estre égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonférence d'un cercle du quel le demi-diamétre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur ; il faut donc considérer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la demi-circonférence du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne GH : dans l'autre solide j'ay les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne LD. Mais dans l'un & dans l'autre j'ay deux lignes communes, sçavoir GH & HF, entre lesquelles il ne peut avoir autre raison que d'égalité, puis qu'elles sont égales, & partant on les peut oster, & la composition des raisons demeurera entre la circonférence d'un cercle & la demi-circonférence de l'autre. Mais les circonférences sont entr'elles comme leurs diamétres : or le diamétre total du cercle entier qui est DC est égal au demi-diamétre GH ; partant la circonférence entiére appartenant à DC sera égale à la demi-circonférence appartenant au demi-diamétre GH ; & par ainsi le cylindre sera égal au solide ; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer toute la figure, lors que le parallelogramme

 le-

lelogramme EYZG se tournant sur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau GF est égal au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui aura pour demi-diamétre la ligne Lƒ. Je dis encore que l'anneau (c'est-à-dire le solide qui se fait par la révolution du cercle quand le tout roule sur YZ) est égal au solide qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui a pour demi-diamétre la ligne Lƒ.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre solides suivans sont proportionnaux, sçavoir le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ. Le second est l'anneau qui se fait par le cercle quand le grand parallelogramme GY tourne sur la ligne YZ. Le troisiéme est celuy qui a pour base le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la ligne ZB. Et le quatriéme est celuy qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la ligne Lƒ; & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisiéme, le second par conséquent doit estre égal au quatriéme. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH est au quarré de GZ, ainsi le rouleau GF est au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut éxaminer comment la figure qui a pour base le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la ligne Lƒ, est égale au mesme grand cylindre GY.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur : je considére quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne GZ qui est le demi-diamétre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est HF. Mais d'autant que nous avons besoin de trois costez en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence du

cercle

cercle duquel la ligne L ς est demi-diamétre, lequel solide a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la circonférence du cercle qui a L ς pour demi-diamétre. Pour avoir trois costez au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diamétre qui represénte son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diamétre GZ, & la demi-circonférence du mesme cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archiméde.)

J'auray donc trois costez ou lignes au grand cylindre, sçavoir GZ, HF, & la demi-circonférence du cercle dont GZ est le demi-diamétre. Il y a donc dans ces deux solides deux costez qui sont semblables, sçavoir HF en chacun d'iceux; & partant ils ne servent de rien pour la composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ antécédent & conséquent, & la circonférence entiére du cercle qui a L ς pour demi-diamétre, à la demi-circonférence du cercle qui a GZ pour demi-diamétre. Mais d'autant que les circonférences sont entr'elles comme leurs diamétres, au lieu des circonférences je prens le diamétre entier qui est deux fois L ς, & pour la demi-circonférence je pose son demi-diamétre GZ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne GH à GZ, & de la ligne L ς doublée à la ligne GZ.

Or si on multiplie les antécédens l'un par l'autre, & pareillement les conséquens, on aura ladite raison composée; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L ς ou ZB en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB: or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a L ς pour demi-diamétre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ; donc le rouleau & le solide auront mesme raison au cylin-

dre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le mesme parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisiéme dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatriéme seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tourne sur la ligne YZ: l'autre solide est celuy qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence du cercle duquel le demi-diamétre est la ligne L ʃ.

Il faut maintenant voir ce qui se fait quand le roulement se fait sur la ligne AB. Nous avons ici representé la figure comme un cercle; le mesme se doit entendre d'une ellipse: & partant il faut voir ce que fait la sphére qui se forme par la révolution du demi-cercle ABC sur le diamétre AB, ou le sphéroïde qui se forme par la révolution de la demi-ellipse sur la mesme ligne AB.

Il faut entendre que le quarré de I 12 est au quarré de K 13, comme le rectangle BIA est au rectangle BKA, & le quarré K 13 est au quarré LD, comme le rectangle BKA au rectangle BLA, & ainsi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipse. Or, tant la sphére que le sphéroïde qui sont formez par le roulement, sont au cylindre qui se fait en mesme temps, comme tous les quarrez I 12, K 13 & autres petits, au grand quarré BH pris autant de fois. Mais pour la raison des petits quarrez, j'ay pris la raison des petits rectangles qui est la mesme: il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits rectangles, afin de laisser les grands quarrez. Je prendray le rectangle BLA qui vaut le quarré de LD ou MV, sçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle BIA avec le quarré de LI est égal au quarré de LA ou LD son égal, ou quelqu'autre des grands quarrez; le rectangle BKA plus le quarré

ré de L K est égal au mesme grand quarré L D, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire ; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez L I, L K qui vont toûjours en diminuant, & par ainsi font une pyramide que nous sçavons estre la troisiéme partie de son parallelipipede ou cube. Si donc nous ostons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphere ou spheroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre ; ce qu'il falloit prouver.

DE L'HYPERBOLE.

DANS l'Hyperbole AEDBC le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée ; AC est le diamétre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'Hyperbole. Il faut voir quand l'Hyperbole tourne sur la ligne AD, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est à dire, le solide qui se fait quand le parallelogramme FD tourne aussi sur l'axe AD. PLANC. XVII. Fig. 1.

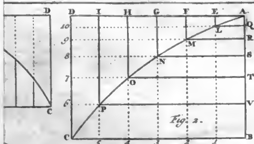
Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarrez ensemble compris dans l'espace AED, sçavoir le quarré de HO, de IP, LQ, & les autres, sont au quarré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarrez entr'eux avec le grand.

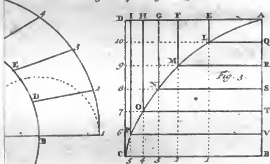
La propriété de l'Hyperbole est que le quarré HO est au quarré IP, comme le rectangle CHA est au rectangle CIA ; le quarré IP est au quarré LQ, comme le rectangle CIA au rectangle CLA, & ainsi des autres ; & par ainsi tous les petits rectangles sont au grand rectangle CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrez sont au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour sçavoir quelle est cette raison, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle CHA je pose le rectangle

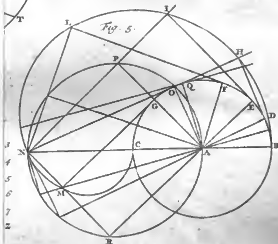
CAH plus le quarré HA; au lieu du rectangle CIA, je pose le rectangle CAI plus le quarré IA, & ainsi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera ensuite la comparaison, premiérement des rectangles CAH, CAI, & des autres petits entr'eux & au grand CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles sont de mesme hauteur, sçavoir CA, & par ainsi ils seront entr'eux comme leurs bases. Nous avons donc pour les petits rectangles un solide qui a pour hauteur la ligne CA, & pour base tous les nombres naturels qui composent un triangle. Si au lieu de la ligne CA je prens sa moitié AB, j'auray un solide qui aura pour base le quarré de AD, & pour hauteur la ligne BC; cecy est pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, son solide a pour hauteur DC, & pour base DA pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'est-à-dire le quarré DA; partant les deux solides ont tous deux le mesme quarré DA pour base; & partant nous n'avons à considérer que leur hauteur DC pour le grand, & BC pour le petit; partant tous les petits rectangles sont au grand rectangle pris autant de fois, comme DC est à BC.

Il reste maintenant à considérer comment tous les petits quarrez sont au mesme grand rectangle. Or tous les petits quarrez, sçavoir ceux de AH, AI, AL, AM, AN, font une pyramide qui a pour base le quarré de AD, & pour hauteur la mesme AD. (car les quarrez diminuez à l'infini font une pyramide) mais la pyramide est le tiers de son parallelipipede; c'est-à-dire du solide qui a pour base le mesme quarré que la pyramide, & qui se hausse autant que la pyramide, sçavoir de la ligne DA; donc au lieu de la hauteur DA, j'en prens le tiers, & j'ay le solide qui a pour base le quarré DA, & pour hauteur le tiers de DA; joignant donc ce tiers de DA avec BC que j'avois trouvé devant, j'ay le tiers de DA plus BC ou AB son égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élégamment, je diray: Comme le tiers de AG (car j'ay adjousté à AC la ligne CG égale à BC) avec le tiers


D
I
H
G
F
E
A
10
9
8
7
6
Q
R
S
T
V
L
M
N
O
P
C
B
5
4
3
2
1
Fig. 2.


D
I
H
G
F
E
A
10
9
8
7
6
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
C
B
5
4
3
2
1
Fig. 3.


Fig. 5.
I
L
H
P
Q
O
F
G
E
D
N
C
A
B
M
R

Roberval

tiers de DA qui est comme le tiers de DG à la ligne DC; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par AFED. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit, si le triangle AED se tournoit sur la ligne DA (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE.) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre: prenant donc le tiers de la ligne DC, elle sera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

Autre spéculation sur l'Hyperbole.

Du centre de l'Hyperbole B j'ay tiré les asymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies paralleles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 est égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne sur DA, il se fait un cône qui est égal à tous les quarrez qui sont dans le plan, sçavoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrez j'en oste premiérement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan EDA, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par EDA tournant sur DA. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de HO; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré IP; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de LQ, & ainsi des autres. Mais chacun des rectangles est égal au quarré de A 1, lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre 1 20 DA; partant ostant ce cylindre, il restera les quarrez de HO, IP, LQ, qui sont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

PROPORTION DE LA SPHERE
ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonscrit, & au Cône inscrit.

PLANC. XVII. Fig. 2.

On confidérera icy ce que fait cette figure tournant fur BD, & ne prenant que la portion 26 BL4 que fait le cylindre & la portion de la Spére ou Sphéroïde qui fe fait par la révolution de la figure 4 1 BL. Le quarré de G 1 & les autres petits font au grand quarré 4 L pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la Sphére ou fphéroïde (car c'eft la mefme raifon en l'une & en l'autre) eft au cylindre 26 BL 4. Il eft donc queftion de chercher la raifon de ces petits quarrez au grand quarré. Or tous les petits quarrez font au grand, comme les rectangles DLB, DIB, DHB, DGB font au grand rectangle DLB; partant tous lefdits petits rectangles font au grand rectangle DLB pris autant de fois, comme tous les petits quarrez font au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raifon des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vaillent autant, & je dis ainfi : Le rectangle DBL moins le quarré BL vaut le rectangle DLB; le rectangle DBG moins le quarré BG vaut le rectangle DGB; le rectangle DBH moins le quarré BH vaut le rectangle DHB; le rectangle DBI moins le quarré BI vaut le rectangle DIB; partant dans les petis rectangles je trouve un folide qui a pour hauteur DB, & pour bafes les petites lignes LB, LG, LH, LI qui font la fomme de nombres naturels qui eft un triangle lequel eft toûjours la moitié de fon quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainfi j'auray un folide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ay ofté la moitié de DB) & pour bafe le quarré de LB comme l'autre folide. Pour le grand rectangle, fçavoir DLB pris autant de fois, il compofe un folide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour

bafe

base le mesme quarré L B. Les bases estant égales, il n'y a que les hauteurs à considérer, sçavoir D B & B L. Mais il faut oster des petits rectangles les quarrez qui estoient de moins : or ces petits quarrez composent une pyramide qui a pour base le quarré de L B, & pour hauteur L B. Au lieu de la pyramide je prens un parallelipipede qui luy soit égal : je retiens le mesme quarré L B, & pour hauteur le tiers de L B, qui est la hauteur du parallelipipede égal à la pyramide (car toute pyramide est le tiers de son parallelipipede.) Il faut oster ce solide de l'autre qui a mesme base, & partant il suffit d'oster la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le solide fait par les petits rectangles. Il reste maintenant à chercher le solide du grand rectangle. Or ce solide n'est autre que celuy qui a le quarré L B pour base, & D L pour hauteur. Celuy-cy n'a point d'autre base que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur D L en celuy-cy, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car D A moins le tiers de L B vaut le tiers de la ligne 25 L) est à la ligne D L, ainsi le solide fait par la figure 4 2 B L est à son cylindre fait par le parallelogramme 26 4 L B.

Que si nous voulons avoir le cône qui se feroit par la mesme révolution, si on tiroit une ligne B 4. Nous sçavons que le cône est le tiers de son cylindre ; je prendray donc le tiers de D L (laquelle représente le cylindre) & je diray que comme le tiers de la ligne 25 L est au tiers de la ligne D L, ainsi nostre solide est au cône : or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entiére à la ligne entiére ; partant le solide sera au cône, comme la ligne 25 L est à la ligne D L ; ce qu'il falloit trouver. Dans la mesme figure il faut considérer que, lors qu'elle tourne sur la ligne A B quand le cylindre V E F Y se fait, il se fait aussi un solide par la révolution du plan A B F, qui s'appelle un creux. Il se fait encore un autre solide par le plan B 30 F Y. Nous en avons encore un autre qui se fait sur le triangle A Y B qui est un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous lesdits solides.

 Les

Les divisions estant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures sont entr'elles comme les quarrez de ces lignes sont entr'eux. Or pour ce qui est du cône que nous voulons égaler au solide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total est coupée en deux également au point I, sçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'oste le quarré I 32, il me reste le rectangle 15 32 38 qui appartient au solide B 30 FY.

Puis, aprés nous entrons dans les proprietez de l'ellipse; (car ce que je concluray s'entendra du cercle comme de l'ellipse.) Le diamétre EF, le diamétre BD & le costé droit du diamétre EF, sçavoir la ligne 48, sont trois proportionnelles; & la premiére EF est à la troisiéme 48, comme le quarré de la premiére EF est au quarré de la seconde DB. De plus, le rectangle E 49 F est au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF est à la ligne 48 costé droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F est au quarré 49 32, comme le quarré EF est au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je pose son égale BY; donc le quarré BY est au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY est au quarré BA, comme le quarré I 44 est au quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera au quarré IA, comme le quarré I 44 est au mesme quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera égal au quarré I 44; & par ainsi le cône sera égal au solide de B 30 FY. Mais le cône est le tiers de son cylindre; si donc j'oste le tiers du cylindre total, il restera les deux tiers pour le solide ou le creux qui se fait par le plan AFB, qui est ce qu'on cherchoit.

Or, non-seulement le cône est égal au solide extérieur, mais chaque partie est égale à chaque partie; c'est-à-dire que le solide fait

fait par N 47 46 M, eſt égal au ſolide fait par 35 41 40 34; le ſolide 45 L M 46 eſt égal au ſolide 33 39 40 34, & ainſi des autres. Par tout cecy nous venons à la connoiſſance du centre de gravité de tous ces ſolides; car le centre de gravité du cylindre A Y eſt au milieu de la ligne AB; or le centre de gravité du cône eſt aux $\frac{3}{4}$ de la ligne AB; le centre de gravité du ſolide qui luy eſt égal, ſe trouve au meſme lieu dans la ligne BA aux $\frac{3}{4}$ d'icelle; partant, ſelon Archiméde, le centre de gravité de la Sphére ou Sphéroïde reſtant du cylindre ſera connu, parce qu'il eſt en la raiſon réciproque des deux ſolides, ſçavoir de la Sphére ou Shpéroïde, au ſolide dehors, c'eſt-à-dire à B 30 F Y, aux lignes qui ſont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit ſolide, & à la ligne qui part du centre de gravité du meſme grand cylindre au centre de gravité de la figure reſtante que je cherche, que eſt de la Sphére ou Spheroïde.

PROPORTION

du Cône au Cylindre.

EN cette figure le triangle eſt au parallelogramme, comme tous les nombres naturels ſont au quarré du plus grand; c'eſt-à-dire, comme 1 à 2. Que ſi vous le faites tourner ſur la ligne BD, le cône qui ſe fera de BDC ſera au cylindre qui ſe fera ſur ABDC comme 1 à 3 ſelon Archiméde. PLANC. XVII. Fig. 3.

DE LA CONCHOÏDE.

NOus conſidérons premiérement le grand triligne A 7 14. Le centre de la Conchoïde eſt A; la Conchoïde 14 7 eſt la premiére, & la ſeconde Conchoïde eſt 16 17; la régle qui les ſépare BC; les lignes qui partent de cette régle ou ligne & qui vont aux deux Conchoïdes, ſçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, ſont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 ſont égales entr'elles & aux autres cy-deſſus, ſçavoir à C 7, M 6, &c. Nous diſons donc ainſi: PLANC. XIX. Fig. 1.

 Le

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs: or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarrez; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarrez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considérons son égal; & par ainsi nous trouvons que le quarré A7 vaut les quarrez AC, C7 plus deux fois le rectangle AC7; le quarré A 17 vaut les quarrez AC, C7 ou C 17 moins le rectangle AC 17 pris deux fois. Tout cecy mis ensemble vaut le quarré C7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre; or ces quarrez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarrez AC, & C7. [La petite figure qui est icy a esté faite, d'autant que dans l'espace C7 B14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarrez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C7, M6, & autres: ces secteurs sont aux grands secteurs, comme les quarrez de C7, M6, L5, & autres, sont aux grands quarrez A7, A6, A5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A7 14 & A17 16, & les quarrez AC & C7 pris deux fois: au lieu des quarrez C7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la mesme raison entr'eux que lesdits quarrez; partant au lieu de dire, deux fois les quarrez C7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure TVYX, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16; & c'est icy la première conséquence ou conclusion.

Pour la seconde, c'est quand nous ostons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un costé l'espace

ſpace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits ſecteurs, le triangle A B C, & l'eſpace 16 17 C B. Alors l'eſpace d'une conchoïde à l'autre, c'eſt à-dire 16 17 7 14, eſt égal à deux fois les petits ſecteurs plus deux fois l'eſpace 16 17 C B ; & c'eſt icy une autre concluſion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en oſte le petit, il reſte le grand A 7 14 qui eſt égal à deux fois les petits ſecteurs, au triangle A C B & à l'eſpace 16 17 C B, qui eſt une autre concluſion.

Que ſi on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle A C B, il reſtera l'eſpace 7 C B 14 qui ſera égal à deux fois les petits ſecteurs avec une fois C B 16 17, qui eſt une quatriéme concluſion.

Maintenant il nous faut voir quelle raiſon il y a entre le triangle A B C & l'eſpace B C 7 14. Cela ſe fera conſidérant le quarré A 7 duquel nous oſterons le quarré A C. Ayant donc diviſé le triligne A 7 14 en ſecteurs tous ſemblables & infinis, ainſi qu'il a eſté fait cy-deſſus aux autres concluſions, & ſçachant que les ſecteurs ſont entr'eux comme leur quarrez, nous diſons que le quarré A 7 eſt égal aux quarrez A C & C 7 plus le rectangle A C 7 pris deux fois. Si j'en oſte le quarre A C, il me reſte le quarré C 7 plus le rectangle A C 7 deux fois. Il faut conſidérer quels ſolides ils ſont.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres ſont tous égaux ; & par ainſi tous joints enſemble ſont un parallelipipede ou ſolide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, ſçavoir autant qu'on aura pris de fois & adjouſté les quarrez l'un à l'autre ; c'eſt le premier ſolide qui ſe forme.

L'autre ſe fait du rectangle A C 7 pris autant de fois que les ſuſdits quarrez, & forme un ſolide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais ſa longueur eſt diverſe, ſçavoir des lignes A C, A M, A L, & des autres qui toutes ſont inégales.

Or

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celuy qui est composé des quarrez AC, AM & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide sera racourci de deux costez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervalle AD: car alors la ligne BC sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD sera le sinus total; & les lignes AN, AO, AP seront toutes des secantes, & ainsi le solide sera formé des quarrez des sécantes. Or ces deux solides estant de mesme hauteur, sçavoir de la ligne C7 & autres; il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarrez C7, M6, &c. d'une part, & de la ligne C7 multipliée par la somme des lignes AC, AM, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle AC7 est deux fois dans le quarré A7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le solide qu'il faut comparer à celuy-cy est fait par la somme des quarrez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarrez AC, AM, & autres, est au solide composé des deux cy devant mis; ainsi le triangle ABC est à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C 7, M 6 me sont données, & partant leurs quarrez: de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la ligne AD (que je prens pour sinus total ou demi-diamétre d'un cercle que je feins estre fait) m'est donnée, & la ligne DE sur lesquelles j'ay formé ma Conchoïde; & par le moyen de AD sinus total & de l'angle BAD, je connois toutes les sécantes de ce cercle que je pose estre décrite sur le rayon AD: ces sécantes sont AN, AO, AP, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarrez de AC, AM me seront donnez, puisque les lignes sont données; & ainsi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or CA, & MA sont sécantes; donc par le calcul il nous sera facile d'en

d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le fecond folide qui eft compofé de l'aggrégé ou fomme des quarrez des fécantes; & telle fera la raifon de ABC à l'efpace BC 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un efpace égal à un Quarré donné, & ce d'un feul trait de Compas.

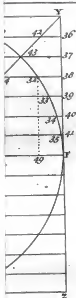
On demande qu'il foit tracé fur un cylindre droit d'un feul trait de compas un efpace égal au quarré de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diamétre duquel FE foit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur foit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur foit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un efpace fur la fuperficie du cylindre. Je dis que cét efpace vaut le quarré de AB. PLANC. XVIII. Fig. 1.

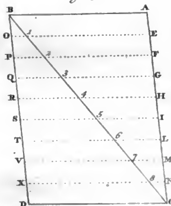
Pour le prouver, je divife le cercle en parties infinies aux points EGHI & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points font infinis: du point E qui eft l'extrémité du diamétre, je tire à chaque point de la divifion des lignes droites EG, EH, EI, & autres qui font dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes font des finus du quart d'une circonférence; ce qui fe connoiftra, faifant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diamétre le double de EF; mais icy je me contente de la quatriéme partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui foient toutes égales à FE, elles iront jufques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle fe trouve dans le demi-cercle ELF; & partant toutes les petites lignes font les finus du quart d'une circonférence.

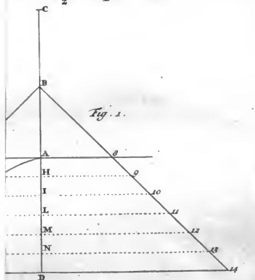
Nous sçavons que le demi-diamétre du cercle est au quart de la circonférence, comme tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Nous sçavons aussi que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par les infinis petits sinus qui divisent ce quart de circonférence. Or le demi-diamétre est FE qui est égal à la ligne droite AC moitié de AB; partant son quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les sinus EG, EH, &c. sont égaux aux perpendiculaires élevées des points G, H, &c. jusques au retranchement fait par le compas, comme il sera montré; & par ainsi la figure ou l'espace tracé par le compas qui est ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds posé sur F qui est un point pris en quelque endroit que ce soit de la surface du cylindre, & l'autre pied, par exemple sur le point E, & tournant sur la superficie du cylindre tant qu'il revienne au mesme point E: cét espace compris sur le cylindre vaut quatre fois l'espace compris des petits sinus qui divisent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il se peut ainsi dire. Or le cylindre est présumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle FME parallele à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a esté retranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour cét effet, il faut tirer la ligne FH, & concevoir deux triangles*, l'un de la ligne FH & FE portée a l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée sur la

* *On considere icy deux triangles qu'on veut prouver estre égaux: l'un est FHE; l'autre a pour base FH, pour catet la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hipotenuse sera égale à FE, puis que c'est l'ouverture du compas.*


Y
42
36
43
37
38
32
39
33
40
34
41
35
F
49
Z


Fig. 3.
B
A
O
E
P
F
Q
G
R
H
S
I
T
L
V
M
X
N
D
C


C
B
Fig. 1.
A
8
H
9
I
10
L
11
M
12
N
13
D
14

oberval

la surface du cylindre. Ces trois lignes sont un triangle rectangle qui est égal au triangle FEH; car en tous les deux triangles la ligne FH est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne FH & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celuy qu'on veut montrer égal à FEH, & pareillement l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit, estant dans le demi-cercle; la ligne FE qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à FE; partant la ligne FH est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne FE par la révolution du compas. Le mesme se prouvera de toutes les autres lignes EG, EI, EL, EM, & autres.

Or cette figure se trouve estre la mesme que la fig. 1. pl. 16., si on suppose que la circonférence EHLF est égale à BC dans la fig. 1. pl. 16. & qu'elle est divisée infiniment en sinus GE, HE, IE, & les autres, tout ainsi que la ligne BC de la figure pl. 16. est divisée en sinus infinis, sçavoir GH, IL, MN, &c. Or nous devons considérer la fig. 1. pl. 16. ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles sont. Par exemple, quand la figure pl. 16. tourne sur la ligne BC, elle fait un cylindre avec le rectangle BD, & un autre solide avec la figure courbe ACB. Je trouve que le cylindre est double du petit solide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me sers de la figure présente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui sont toutes égales aux premiéres tirées du point E aux mesmes points, sçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis en suite que les quarrez de GE & GF sont égaux au quarré de FE: il en est de mesme des quarrez de EH & HF, & ainsi des autres; partant tous ces quarrez ensemble seront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrez je n'ay besoin que de ceux qui composent la figure, sçavoir des quarrez de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui sont la moitié de tous ceux que

j'avois comparez avec le grand quarré FE; partant tous ces petits quarrez seront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les solides sont entr'eux comme tous les quarrez pris ensemble; partant le petit solide fait de la figure courbe ABC en la figure, de la pl. 16. sera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2; ce qu'il falloit démontrer.

On considérera encore en la mesme figure un autre trait de compas. Je pose une des pointes sur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F 1 E L, lequel cercle est la base mitoyenne du cylindre qu'on suppose toûjours prolongé en haut & en bas autant qu'il est nécessaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'iceluy est F 1 qui est la soutendante du quart de la circonférence totale F 5 1. Or cette circonférence est divisée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. sur chacun desquels j'éleve des perpendiculaires, comme cy-devant : des mesmes points je tire des perpendiculaires sur le demi-diamétre FD qui le divisent en une infinité d'autant de parties inégales. Il faut maintenant considérer les propriétez de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il se fait plusieurs triangles rectangles dont les costez sont F 2, F 1, & la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est en l'air; le second, F 3, F 1, & la perpendiculaire en l'air sur le point 3; F 4, F 1, & la perpendicle en l'air sur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à mesure que la soutendante diminuë. Car les quarrez des deux lignes F 2 & la perpendiculaire en l'air sur le point 2, sont égaux au quarré de F 1; les quarrez de F 3, & de la perpendiculaire sur 3 en l'air sont égaux au mesme quarré F 1, & ainsi des autres. Mais le quarré F 1 est égal au rectangle EFD, le quarré F 2 est égal au rectangle EF 10, le quarré F 3 au rectangle EF 11, & ainsi des autres quarrez & rectangles; partant tous les rectangles EFD, EF 10, EF 11, & les autres, sont entr'eux comme les quarrez F 1, F 2, F 3, &c. & partant tous les rectangles EF 10, EF 11, & autres tous ensemble

femble font au grand rectangle EFD, comme tous les quarrez F2, F3, &c. font au grand quarré F1. Quand du rectangle EFD j'ofte le rectangle EF 10, il refte le rectangle EF par 10D qui eft égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air; quand du mefme rectangle EFD j'en ofte le rectangle EF 11, il refte le rectangle EF par 11D qui eft égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ay befoin des quarrez de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la fig. 1. pl. 16. fur BC, ces lignes repréfentent les demi-diamétres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diamétre de la bafe du cylindre.) Mais tous les rectangles fufdits ont une mefme hauteur, fçavoir FE; & partant ils font entr'eux comme les lignes FD, F 10, F 11. Si on ofte de la bafe d'un rectangle la bafe d'un autre rectangle, il reftera leur différence: comme fi de FD j'ofte F 10, il reftera D 10; fi de FD j'ofte F 11, il reftera D 11, & ainfi des autres. Or ces reftes font homologues avec les quarrez des lignes perpendiculaires qui reftent quand j'ay ofté le quarré F2 du quarré F1: du mefme quarré F1 j'ay ofté le quarré F3, puis F4, &c. il refte les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D11, & autres garderont entr'elles la mefme raifon que les quarrez defdites perpendiculaires. Mais les lignes D10, D11, D12, &c. font finus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. font perpendiculaires fur le diamétre EF; donc les quarrez des perpendiculaires font au quarré de la grande FI prife autant de fois, comme tous les petits finus font au finus total DF pris autant de fois. Mais les petits finus font au finus total pris autant de fois, comme le demi-diamétre du cercle eft au quart de la circonférence; partant le folide fait par la révolution de la figure courbe ACB * fur la ligne BC, fera

* *Il faut entendre icy que la figure ABC eft faite de toutes les perpendiculaires élevées fur les points 2, 3, 4, &c. & que AB eft égale à F1.*

ſera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diamétre du cercle eſt au quart de la circonférence.

Conſidérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toûjours le point F pour poſer ledit compas. Il ſe trouve que le quarré F 4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, eſt égal au quarré de F 3; le quarré F 5 avec celuy de la perpendiculaire ſur le point 5 en l'air, ſont égaux au meſme quarré F 3, & ainſi des autres. Or le rectangle EF 11 eſt égal au quarré F 3, & le rectangle EF 12 eſt égal au quarré F 4, & ainſi des autres rectangles & quarrez. Si donc du rectangle EF 11 j'oſte le rectangle EF 12, il reſte le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire ſur 4 tirée en l'air. Si du meſme rectangle EF 11 on oſte le rectangle EF 13, il reſte le rectangle EF par 13 11 qui eſt égal au quarré de la perpendiculaire tirée ſur 5, & ainſi des autres. Que ſi nous feignons une parabole eſtre tirée du ſommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris ſur ſon axe 11 F on tire des ordonnées juſques à la circonférence de ladite parabole, les quarrez de telles ordonnées ſeront égaux aux rectangles; ſçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, ſera égal au rectangle fait par le coſté droit de ladite parabole qui eſt FE, & la portion de l'axe 11 12; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, ſera egal au rectangle EF par 11 13, & ainſi des autres. Ce qui fait voir que les quarrez des ordonnées ſont égaux aux quarrez des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par conſéquent les ordonnées ſeront égales auſdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires ſont en égale diſtance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement diſtantes l'une de l'autre cela eſt cauſe qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui ſe fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires diviſent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne diviſent pas l'axe également, mais inégalement; & ainſi le plan qui ſe fait des perpendi-

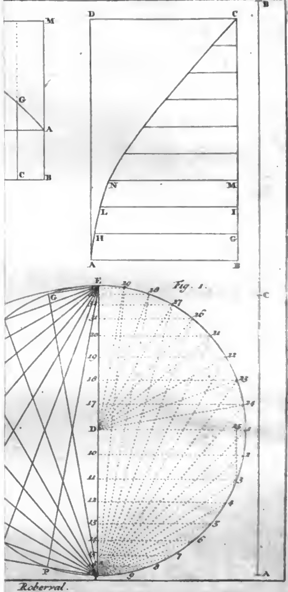
pendiculaires ne peut pas estre comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en sçavoir la raison.

Maintenant il faut considérer la raison des solides, si la figure se tournoit sur la ligne F 5 3 étenduë en ligne droite, supposant que le trait du compas se fasse du point F, & de l'ouverture F 3. Or nous avons trouvé par le précédent discours, que le rectangle E F par 11 12 est égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 en l'air; le rectangle E F par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire sur 5 en l'air, & ainsi des autres: partant toutes ces lignes seront homologues avec les quarrez desdites perpendiculaires. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diamétre D 1, car il s'en faut la ligne D 11 qu'elles ne viennent jusques à D 1. Que si elles estoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précédente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total D 1 pris autant de fois. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. sont les mesmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur 11 3, & du point 5 & 6 sur la mesme 11 3, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne 11 D, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne D 1, sçavoir 3 25. Comme donc la ligne 11 3, ou D 25 son égale, à la circonférence F 5 3, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus, sçavoir D 12, D 13, D 14, D 15, D 16 moins autant de fois D 11; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le mesme espace D 11 pris autant de fois, comme le solide fait par les quarrez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Cecy sera mieux représenté par cette autre figure. Que I B soit égal à la circonférence F 5 3; A B à D 11 ou à 3 25; & les lignes C G, H N, O P, &c. égales à D 12, D 13, D 14, & autres sinus, desquels il faut retrancher A B ou D 11 pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme A B I L. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est D F en

PLANC. XVIII. Fig. 2.

en la grande figure, mais en la petite c'est IK qui fait le parallelogramme IKBM duquel il faut oster le mesme parallelogramme ABIL; & partant il reste le parallelogramme LAMK,.& de IKAB il restera le triligne LAPK; & partant le solide fait par les quarrez des perpendiculaires est au cylindre de la grande, comme le triligne LAK au parallelogramme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raisons en lignes; & retournant à la grande figure, nous disons: Comme tous les petits sinus sont au grand sinus pris autant de fois; ainsi le sinus 11 3 est à la circonférence F 3. Or il faut oster de cette raison ce qui y est de trop, & dire: Comme tous les petits sinus moins 11 D pris autant de fois, au sinus total pris autant de fois, moins le mesme 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira: Comme le sinus total DF est à D 11, ainsi la circonférence F ſ 3 sera à quelque portion de la mesme circonférence F ſ 3, laquelle portion il faut oster de la ligne ou sinus 11 3; & par ainsi la ligne 11 3, quand on en a osté ce qui avoit esté retranché de ladite circonférence F ſ 3, est à ce qui reste de ladite circonférence F ſ 3, comme le petit solide fait des quarrez de perpendiculaires est à leur cylindre. Or tous les sinus & la circonférence me sont donnez; & partant la raison des solides sera connuë, ce qu'il falloit prouver.

PLANC. XIX. Fig.2.3. Maintenant il faut considérer sur la mesme figure la raison des solides entr'eux quand elle roule sur la ligne circulaire F 2 21 étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas est F 21, sans répéter ce qui a esté dit cydevant: on trouve que les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 21, 22, 23, 24, &c. sont entr'eux comme les lignes 20 19, 20 18, 20 17, &c. Or toutes ces lignes se doivent considérer en cette sorte, 20 D — 19 D; 20 D — 18 D; 20 D — 17 D, & ainsi des autres. Les suivantes se considérent ainsi, 20 D + 10 D; 20 D + 11 D; 20 D + 12 D; 20 D + 13 D, &c. en sorte que 20 D est pris autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence F 2 21 & les autres sinus, sçavoir D 10, D 11, D 12, D 13 &c. sont pris autant



D
C
M
G
A
C
B
N
M
L
I
H
G
A
B
B
C
A
E
Fig. 1.
G
D
P
Roberval.

autant de fois qu'il y a de divisions au quart de la circonférence F ʃ 1. De tout cecy il en faut oster les lignes D 19, D 18, D 17, & les autres prises autant de fois qu'il y a de divisions dans la circonférence 1 21. Voilà une des équations; l'autre est la ligne F 20 prise autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence F 2 21.

Pour mieux entendre ce discours, on fera la figure 3 en laquelle AB vaut F 1, quart de la circonférence; BC vaut 1 21; & la toute AC vaut la circonférence F 3 21; AN vaut F 20, & par ainsi le parallelogramme NC vaut ce qui est contenu dans 20 F 2 21; NG vaut FD sinus total; AG ou son égale NI vaut D 20; NH égale à OP vaut la circonférence 1 21. Nous disons donc que comme le rectangle ANPC est au rectangle INPL + le triligne NGO — le triligne INH ou OMP son égal, ainsi le cylindre est au solide qui se fait quand la figure retranchée du cylindre tourne sur la circonférence F 1 21 étenduë en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une considération qui est que prenant toûjours le mesme point F, & l'ouverture du compas telle que son quarré soit égal aux quarrez de FE & de la ligne 30, il se trouve, par éxemple, que les quarrez de FE & de 30 sont égaux aux quarrez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarrez E 22 & 22 F; partant les quarrez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux aux quarré de 22 F & à celuy de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'oste des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarrez des lignes qui partent du point E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toûjours, puisque les quar-

rez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous ces quarrez je n'ay besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarrez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits quarrez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarrrz des perpendiculaires en l'air, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous conclurons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étenduë comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne FE, & de l'autre la mesme circonférence étenduë; & de celuy-cy il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la mesme circonférence étenduë, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne sur la circonférence étenduë; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylindre & à la moitié du grand tout ensemble; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrez de E 22 & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22, & le rectangle FE 19 est égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF, & sur quelqu'autre ligne tirée depuis E en K, & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir FE 19, & FEK, qui valent le rectangle FE K 19 sont égaux aux quarrez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22. Or si du point K comme sommet je décris une parabole, dont le costé droit soit égal à FE, & KF soit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle FE par 19 K, & ainsi de toutes les autres; partant les quarrez desdites ordonnées seront égaux aux quarrez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mesmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'est pour-

pourquoy le plan occupé par les perpendiculaires devroit estre égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le sont inégalement, puis que la ligne FE est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut estre comparé au plan.

Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarrez des sinus avec le quarré du diamétre FE. La circonférence F 1 E est divisée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diamétre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui est sinus de complément égal à la ligne tirée du point 24 perpendiculaire sur le demi-diamétre D 1, & est égale au sinus 29 34. Le mesme quarré du demi-diamétre D 23 est égal aux quarrez de 18 23, & de 18 D sinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 23 sur D 1, & aussi au sinus droit 28 33. Le quarré de D 22 est égal aux quarrez de 22 19, & de 19 D sinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 22 sur D 1 & au sinus 27 32, & ainsi de tous les autres, en telle sorte que tous les sinus de complément sont égaux aux sinus droits, cy-devant marquez; & ainsi les quarrez de tous les sinus pris deux fois (ce qui se doit faire, puis que les uns sont égaux aux autres) sont égaux au quarré du demi-diamétre D 1 pris autant de fois qu'il y a de sinus. Mais le quarré du demi-diamétre n'est que le quart du quarré du diamétre; partant le quarré du diamétre sera huit fois la somme des quarrez des sinus, c'est-à-dire, que les quarrez des sinus sont au quarré du diamétre pris autant de fois comme 1 à 8. Voilà la premiére partie.

PLANC. XX. Fig. 1.

Pour la seconde. Le quarré de FE est égal aux quarrez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E, qui est à dire le quarré 28 33 deux fois; le mesme quarré FE est égal aux quar-

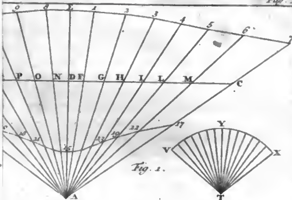
 rez

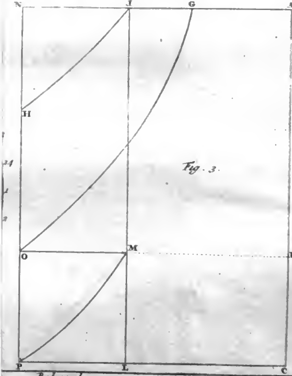
rez F 32, & 32 E, plus deux fois le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27; le mesme F E est égal aux quarrez F 31 & 31 E, plus deux fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26; le mesme quarré F E est égal aux quarrez F 20 & 20 E, plus deux fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainsi de tous les autres tant en haut qu'en bas: & de cette sorte le quarré F E vient à estre égal à deux fois tous ces petits quarrez F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E, & tous les autres, en telle sorte que le quarré F E pris autant de fois est double de tous ces quarrez, & de plus, à deux fois les quarrez de 34 29, 33 28, 32 27, & les autres. Nous avons veû comme tous les quarrez de ces sinus 34 29, 33 28, &c. sont au quarré du diamétre F E pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils sont icy deux fois, & les sinus verses aussi deux fois; partant deux fois les quarrez des sinus verses, & deux fois les quarrez des sinus droits sont égaux à huit fois les quarrez des sinus droits; & ostant de part & d'autre deux fois les quarrez des sinus droits, restera d'une part deux fois les quarrez des sinus verses égaux à six fois les quarrez des sinus droits; & prenant la moitié, les quarrez des sinus verses seront égaux à trois fois les quarrez des sinus droits; partant les quarrez des sinus verses sont à ceux des sinus droits, comme 3 à 1, mais le quarré de F E pris autant de fois est aux quarrez des sinus droits, comme 8 à 1: donc le quarré de F E pris autant de fois est aux quarrez des sinus verses, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

PLANC. XX. Fig. 2.

La précedente conclusion nous servira pour trouver la raison du solide que fait la Roulette, quand elle tourne sur la circonférence du cercle générateur étenduë en ligne droite. Car le solide fait par les sinus verses sçavoir par M 1, N 2, O 3, P 4, &c. est au solide fait par le parallelogramme composé du diamétre du cercle, & de la circonférence d'iceluy étenduë en ligne droite, comme 3 à 8 par la conclusion précedente. Nous sçavons aussi que l'espace compris entre les deux lignes A 11 D & A 4 D est égal au demi-cercle A H B, parce que les lignes d'un des espaces sont éga-

les


P
O
N
D
F
G
H
I
L
M
C
Y
V
X
T
A
Fig. 1.


N
J
G
A
H
Fig. 3.
O
M
B
P
L
C
Roberval.

les aux lignes de l'autre efpace par la conftruction : partant le double de l'efpace eft égal au cercle entier AHBA, de forte que tout ce qui fe dira du cercle fe doit entendre dudit efpace doublé. Mais il a efté démontré que le cylindre de AB eft au folide qui fe fait lors que la figure A 12 D 5 A tourne fur la ligne ou circonférence AC, comme 8 à 2, lefquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez cy devant, font 5, qui eft la raifon qu'il y a du folide entier de la roulette, à fon cylindre ABDC doublé; car ABDC n'eft que la moitié de l'efpace parcouru par la roulette.

Remarquez que ce folide qui eft au cylindre AD tourné fur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8: eft celuy que fait l'efpace compris entre les deux lignes A 12 D & A4D, qui eft égal à celuy que feroit le demicercle AHB par la mefme révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & pofées-en mefme diftance de AC, & partant eft le quart dudit cylindre AD; & joignant ledit folide à celuy qui fe fait par l'efpace compris entre les lignes A4D & AC, qui eft audit cylindre comme 3 à 8, on aura le folide fait par l'efpace compris entre A 12 D & AC, qui fera 5, ledit cylindre AD eftant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT

un efpace égal à la fuperficie d'un cylindre oblique donné, & d'un feul trait de compas.

LE cercle BDCE eft la bafe d'un cylindre oblique, les coftez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui eft l'autre bafe du cylindre, & eft parallele au premier BDCE: (ce cercle peut eftre préfenté par le cercle FNOP, &c. mais il eft en l'air & à plomb audeffus de celuy-cy) l'axe du mefme cylindre fort du centre A, & va rencontrer obliquement le centre dudit cercle fupérieur. Or nous feignons que du fommet de l'axe foit tirée une perpendi- PLANC. XXII. Fig. 1.

 culaire

culaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les costez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. & feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence mesme, & le cylindre en cette sorte se trouve divisé en infinies parallelogrammes; car les costez du cylindre avec la portion de la circonférence des deux cercles font des parallelogrammes qui composent tout l'espace du cylindre; de sorte qu'il faut comparer tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne touchante G2, & du point correspondant à G, sçavoir de N, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, qui la rencontre au point 2; si du sommet du costé du cylindre (j'entens du costé qui commence en G, & va finir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une ligne au point 2: cette ligne sera perpendiculaire à la ligne G2. Du point H je tire une ligne touchante, & du point O correspondant à H, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, sçavoir O3, & ainsi des autres points I & P, L & Q, &c. je ne parle plus de la ligne tirée d'enhaut, car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle sera perpendiculaire à la mesme touchante. Ayant ainsi tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes à chaque point, ces lignes seront N2, O3, P4, Q5, &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2N7, 5O8, 4P9, &c. elles iront toutes finir au point T centre du cercle FS17. Pour la preuve, nous feignons qu'il y a une ligne AG, laquelle avec 27 compose un quadrilatère: en iceluy l'angle 72G par la construction est droit; l'angle AG2 est droit, sçavoir du centre au point d'atouchement; partant 2N, & GA sont paralleles. Soit tirée NT, l'arc GB estant égal à l'arc NF. Il s'ensuit que l'angle

gle GAB eſt égal à l'angle NTF, puis qu'ils ſont faits tous deux aux centres T & A des deux cercles égaux BDC & FS 17, & partant la meſme GA ſera parallele à NT; donc 2N7, & NT ſont paralleles entr'elles; mais elles ſe joignent au point N, & partant elles ne font enſemble qu'une meſme ligne.

Maintenant il faut conſidérer les parallelogrammes, au lieu deſquels je prens la perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur les touchantes cy-devant, comme du ſommet du coſté du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaiſſe la perpendiculaire ſur le point 2, laquelle eſt la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme composé de la ligne G2, qui paſſe dans les indiviſibles pour circonférence, & du coſté du cylindre qui part de G va en l'air, lequel coſté vaut pour deux coſtez du parallelogramme, ſçavoir commençant en G & 2, & finiſſant en la circonférence de la baſe ſupérieure du cylindre; & par ainſi on a les quatre lignes du parallelogramme, ſçavoir G2 (qui paſſe pour circonférence) & ſon égale en la circonférence de la baſe ſupérieure, & les deux coſtez du cylindre. Mais au lieu du parallelogramme nous conſidérons un triangle qui a pour un de ſes coſtez la perpendiculaire tirée du ſommet du coſté ſur le point 2, & qui ſe peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme; & pour les deux autres coſtez, la ligne G2, & le coſté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le coſté du cylindre vaut en puiſſance la ligne G2, & la perpendiculaire tirée du ſommet & finiſſant en 2. Il faut enſuite conſidérer un autre triangle, dans lequel la meſme perpendiculaire tombant en 2 ſoit un des coſtez; 2N ſoit un autre coſté; & le troiſiéme ſoit la ligne tombante perpendiculairement du ſommet du coſté ſur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe ſur 2 peut autant que les deux lignes 2N, & la perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence eſt toûjours égale: mais les lignes 2N, 3O,

4P,

4P, 5Q, &c. sont inégales ; car 2N vaut 7T ; 3O vaut 8T ; 4P est égale à 9T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

Au premier triangle G2 & l'autre point qui est au cercle supérieur le costé du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle supérieur, vaut la ligne tirée du sommet (qui est ce troisiéme point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G2. (on doit entendre cecy de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de la mesme sorte.) Mais les lignes G2, H3, I4, &c. vont toûjours augmentant ; car G2 est égale à la soûtendante A7, la ligne H3 à A8, I4 à A9 ; toutes lesquelles lignes A7, A8, A9 sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G2 est égale à A7, H3 à A8, & ainsi des autres ; de plus que 2N est égale à 7T, 3O à 8T, &c. Pour cét effet, il faut considérer les triangles 2GN, & AT7, ausquels l'angle 2NG est égal à l'angle AT7 ; car les lignes GN, AT sont parallèles, l'angle N2G est droit, par la construction, & pareillement T7A qui est dans le demi-cercle, & partant le troisiéme angle est égal au troisiéme ; la ligne GN est égale à AT, & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne 2N à 7T, & G2 à la soutendante A7 ; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les costez égaux, car ils sont composez des costez du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'iceluy cylindre ; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, & c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premiérement le plus grand de tous qui est fait de BG, tant en la base du cylindre BDC, qu'en l'autre qui est en l'air, & des

des costez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point B, n'est autre chose que le costé du cylindre ; & considérant le second parallelogramme qui a pour costez G H & les costez du cylindre, on voit que ce costé du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire ou hauteur du mesme parallelogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme est plus petite que la perpendiculaire du premier, qui est égale au costé du cylindre ; & par ainsi ces hauteurs ou perpendiculaires vont toûjours en diminuant jusques au quart de cercle, & puis aprés vont en croissant au quart suivant.

Remarquez que les lignes G 2, H 3, I 4, L 5 qui sont touchantes, passent pour la circonference des divisions du cercle, & pour costez des parallelogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que K V est égale à la plus grande des perpendiculaires, & aussi au costé du cylindre, & qui tombe perpendiculairement sur le costé B G au point B : la ligne K X & les autres divisions representent & sont égales à celles de la circonférence, comme K X à B G, & ainsi des autres ; car K E est supposée égale au quart de la circonférence B H D. Le plus grand des parallelogrammes est fait des lignes K V, K X ; & quand il est pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'espace K V Y E ; partant toutes ces lignes sont à la grande K V prise autant de fois, comme la figure K V Z E est au quart de la superficie du cylindre qui est icy représenté par le parallelogramme K V Y E. PLANC. XX. Fig. 3.

Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle B D C. Or chacune de ces perpendiculaires, par éxemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2 ; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement

ſur O, & la ligne O 3, & ainſi des autres. Cecy s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle B D C baſe du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui eſt la baſe ſupérieure du meſme cylindre, duquel centre on abaiſſe la perpendiculaire qui tombe ſur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale A T comme diamétre je forme le cercle A 9 T; la demi-circonférence duquel eſt diviſeé en autant de parties égales qu'il y en a au quart B D de la circonférence du cercle B D C. Puis aprés, du point duquel j'ay tiré la perpendiculaire ſur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la diviſion du cercle, comme il a eſté dit. Du point T je tire des lignes aux meſmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis davantage que le cercle A 9 T nous repréſente la baſe d'un cylindre droit qui a ſon autre baſe en l'air, ſçavoir un cercle dont la circonférence paſſe par le point d'où eſt tiré la ligne qui tombe ſur T, & eſt auſſi le centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, & on nommera icy ledit point qui eſt en l'air, ſommet. Nous diſons donc que la ligne tirée en l'air dudit ſommet ſur le point 7, eſt égale en puiſſance aux deux lignes dont l'une eſt celle qui tombe perpendiculairement dudit ſommet ſur le point T; & l'autre eſt T 7. La ligne qui part dudit ſommet, & va au point 8, eſt égale en puiſſance à la ſuſdite qui tombe dudit ſommet ſur T, & à T 8, & ainſi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe ſur le point T eſt toûjours la meſme, & eſt la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique; & toutes ces lignes qui partent dudit ſommet, & vont ſur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où ſortent toutes ces lignes, & auſſi celle qui tombe ſur T, eſt le ſommet; & chacune deſdites lignes qui vont dudit ſommet ſur 7, 8, 9, &c. ſont chacune égales en puiſſance à ladite ligne qui tombe ſur T, & à celle qui de T va ſur le point de la circonférence A 9 T,

auquel

auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout cecy on doit considérer la figure du discours précédent qui est icy décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diametre FE: la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partant des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au mesme point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarrez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point 22 en l'air; partant les quarrez de FE & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarrez F 22 & de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarrez de F 22, & de 22 E; partant les quarrez de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarrez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ostez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarrez de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le mesme aux autres points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par éxemple, égal aux quarrez de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarrez desdites perpendiculaires en l'air sont égaux aux quarrez de la perpendiculaire sur E en l'air, & des soutendantes 23 E., 22 E, 26 E, &c.

PLANC. XX. Fig. 4.

Or si on suppose que le cercle A 9 T fig. 1 pl. 22. soit aussi grand

que

que F 22 E de la préfente figure, & qu'ils foient tous deux également divifez, & que l'ouverture du compas vaille en puiffance le diametre FE, & la hauteur du cylindre oblique, fçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement fur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des point E, 29, 28, 27, 26, &c. font toutes égales aux lignes qui tombent fur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui font tirées du centre de la bafe fupérieure du cylindre oblique, qui eft le fommet d'où tombe perpendiculairement la ligne fur le point T, & cette ligne eft la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point fur le cercle A 9 T, & eft égale à la perpendiculaire tirée fur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du mefme fommet, eft égale à la perpendiculaire fur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainfi toutes les lignes tirées du fommet, ou centre de la bafe fuperieure du cylindre oblique font égales aux perpendiculaires retranchées par le compas fur la furface du cylindre droit. Or les lignes ainfi tirées du centre oblique fur le cercle A 9 T font égales aux lignes qui tombent fur les points 2, 3, 4, &c. & qui font tirées de la circonference de ladite bafe fuperieure du cylindre oblique, fçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les foutendantes T 7, T 8, T 9, &c. font égales aux lignes N 2, O 3, P 4, &c. nous difons donc que les parallelogrammes qui font en mefme hauteur, & dont les bafes font égales, doivent eftre égaux, & contiennent des efpaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous devons feindre que le cercle A 9 T va jufques au centre du cercle FPS 17, & que fon diamétre AT eft égal à BA demi-diamétre du cercle BDC; & ainfi le demi-cercle A 9 T fera égal au quart de cercle BD. Or le trait du compas qui s'eft fait en la derniére figure F 22 E, fe rapporte entiérement à ce qui s'eft fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait fur le cylindre droit eft égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour

Pour conclusion. Si le cercle de la fig. 4. pl. 20. F 22 E est égal à celuy de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air (quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraye hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & mesme sur C: toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E, seront égales aux perperdiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égale à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessous que dessous ledit point E.

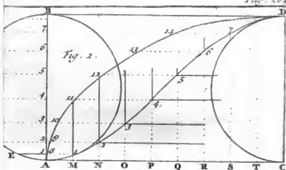
Que la ligne CG soit le diamétre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; ACB soit le diamétre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; CF soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne FG perpendiculaire sur AB, ladite FG sera la hauteur du cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diamétre de sa base; & si on tire de L en I une parallele à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervalle CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons veû cy-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamétre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diamétre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diamétre du cylindre droit est égal au demi-diamétre de l'obli- PLANC. XXI. Fig. 1.

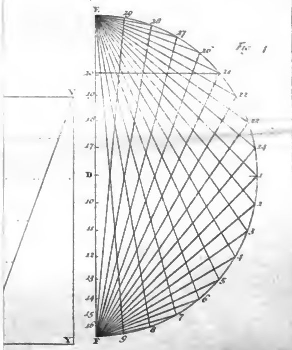
 que,

que, alors ce qui eſt retranché du cylindre droit ſera égal à la ſuperficie du cylindre oblique. Mais l'un n'eſtant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui ſoit égal à la ſuperficie du cylindre oblique, il eſt néceſſaire de trouver un cylindre droit ſemblable au premier CLIG, comme eſt CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle eſt CH: du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO ſemblable au triangle CGF: ces triangles ſemblables ſervent à faire le petit cylindre droit ſemblable au grand cylindre droit; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui eſt retranché eſt égal à la ſuperficie du cylindre oblique propoſé; car le retranché LF du cylindre droit CLIG eſt à la ſuperficie du cylindre oblique propoſé AEDB, comme le diamétre CG au demi-diamétre CB. Mais le petit cylindre CNMH eſtant ſemblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un ſera ſemblable au retranché de l'autre : les ſuperficies des cylindres ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs diamétres; partant la ſuperficie du grand cylindre eſt à celle du petit en raiſon doublée de CG diamétre du cercle du grand cylindre à CH diamétre du cercle du petit; la ſuperficie de l'un ſera donc à celle de l'autre en raiſon doublée de CG à CH, c'eſt-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits eſtant ſemblables, le retranché de l'un ſera au retranché de l'autre, comme toute la ſuperficie de l'un à toute la ſuperficie de l'autre; partant le retranché du cylindre droit CLF eſt au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit eſt à la ſuperficie du cylindre oblique, comme CG à CB; partant le retranché du petit cylindre eſt égal à la ſuperficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a meſme raiſon au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a eſté dit cy-devant pour couper ſur un cylindre droit un eſpace égal à la ſuperficie d'un cylindre oblique, ſe peut reduire à ce qui s'enſuit.

Soit





Roberval.

Soit fait la figure 1. Pl. 22. dans laquelle le diamétre du petit cercle, sçavoir AT, doit estre égal au demi-diamétre du grand cercle BDC base inférieure, & de FPS 17 representant la base supérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre est perpendiculaire sur T joint au point C. Je dis que si on ouvre le compas autant que le costé du cylindre oblique, & que laissant un des pieds du compas sur le point F joint au point A, on trace une ligne sur le cylindre droit dont la base est A 9 T, l'espace compris entre ladite ligne, & ladite base A 9 T, sera égal à la superficie du cylindre oblique. PLANC. XXII. Fig. 1.

Soient divisées les bases desdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, sçavoir, faisant autant de divisions sur le quart de cercle BLD que sur le demi-cercle A 9T, & ce, tant aux bases supérieures qu'aux inférieures desdits cylindres; & tirant des lignes par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cylindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puisque les parallelogrammes susdits ont mesme base, puisqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la base de chacun des cylindres, reste à montrer que leur hauteur est égale. Cette hauteur est facile à connoistre au cylindre droit, puisque le costé mesme du cylindre coupé par le compas, la dénote: mais au cylindre oblique cette hauteur est la ligne tirée de la base supérieure représentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement sur la tangente tirée du point correspondant en la base inférieure; ainsi la ligne tirée de N en l'air sur la touchante G 2 (qui part du point G de la base inférieure correspondant au point N de la supérieure) en sorte qu'il se fasse un angle droit au point 2, est la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N

N en l'air de la base supérieure. Et de mesme, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui est audessus de O en l'air en la base supérieure, est la ligne tirée du mesme point O en l'air au point 3 sur la touchante H 3 où elles font ensemble un angle droit; & ainsi les hauteurs de tous les parallelogrammes sont les lignes tirées des points de la base supérieure perpendiculairement sur les tangentes qui partent des points correspondans en la base inférieure; & ainsi, le moindre de tous les parallelogrammes sera celuy qui du point D de la base inferieure, est tiré au point correspondant à S en la supérieure; car il n'a pour hauteur simplement que la hauteur du cylindre oblique, sçavoir les lignes tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la base supérieure. Comme le plus grand desdits parallelogrammes est celuy qui de B est tiré vers F en l'air; car sa hauteur est le costé entier du cylindre oblique: il reste à demontrer que ces perpendiculaires sont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premiérement, il est certain que l'ouverture du compas, qui fait le retranchement sur le cylindre droit, estant égale au costé du cylindre oblique, la perpendiculaire sur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, sera égale à celle qui va du point B au point correspondant de la base supérieure du cylindre oblique, qui est aussi le costé du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire sur le point T au cylindre droit est égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à sa base supérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de le base inférieure va à celuy de la superieure qui est audessus de T, est égal au costé du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas: mais ledit point T en l'air, centre de la base supérieure, est le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire sur T au cylindre droit, sera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire sur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des costez soit D S; le second, la perpendiculaire

laire qui va de S à la baſe ſupérieure ; & le troiſiéme qui va de D audit point ſur S en l'air ; car ce triangle eſt entiérement égal à celuy qui ſe fait au-dedans du cylindre droit dont un des coſtez eſt AT ; l'autre, la perpendiculaire ſur T juſques au retranchement ; & le troiſiéme eſt l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & eſt égale au coſté du cylindre oblique, ſçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air : la ligne AT eſt égale à DS, comme il eſt aiſé de le montrer ; les angles en T & en S ſont droits ; & partant les triangles ſont egaux, & la ligne ſur T égale à la ligne ſur S.

On montrera, comme cy-devant, l'égalité des autres perpendiculaires, ſçavoir, celle ſur 7 au cylindre droit, à celle qui tombe ſur 2 à l'oblique ; celle ſur 8, à celle ſur 3, &c. & nous le répéterons encore icy. L'ouverture du compas eſt égale en puiſſance aux quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T du cylindre droit ; & pareillement elle eſt égale aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7, & aux quarrez de A 8 & de la perpendiculaire ſur 8, &c. Donc les quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T ſont égaux aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7 ; & ſi au lieu du quarré AT on prend les quarrez de A 7 & 7 T qui luy ſont égaux, on aura les quarrez de 7 T, 7 A, & de la perpendiculaire ſur T égaux aux quarrez de 7 A, & de la perpendiculaire ſur 7 ; & oſtant de part & d'autre le quarré 7 A, on aura le quarré de la perpendiculaire ſur 7 égal aux quarrez de 7 T, & de la perpendiculaire ſur T.

De plus, on a montré que 2 N eſt égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire ſur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air ſur le point N dont un des coſtez ſera N 2 ; le ſecond, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correſpondant en la baſe ſupérieure du cylindre oblique ; & le troiſiéme eſt la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air eſt menée au point 2, & ce troiſiéme coſté eſtant oppoſé à l'angle droit en N, vaut en puiſſance les quarrez de la perpendi-

Ll

pendiculaire ſur N (égal à celuy de la perpendiculaire ſur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T; donc la perpendiculaire ſur 7 ſera égale à la ligne qui du point N en l'air tombe ſur 2. Mais ces lignes déſignent la hauteur des parallelogrammes faits ſur les cylindres; & partant leſdits parallelogrammes ayant la baſe égale & la hauteur égale ſont égaux; & partant la ſurface du cylindre oblique égale à ce qui eſt coupé du cylindre droit. Mais ſi la perpendiculaire tirée du centre de la baſe ſupérieure ne tombe pas ſur la circonférence de la baſe inférieure, en ſorte que A T ne ſoit pas égal au demi-diamétre de ladite baſe, alors il faut proportionner, comme on a montré au diſcours ſur la fig. 1. de la pl. 21.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

Planc. XXI. Fig. 2.

QUE AIB ſoit le chemin de la Roulette; ALMB le parallelogramme fait du diamétre IC, & de la circonférence AB étenduë en ligne droite. Nous cherchons la raiſon qu'il y a du cylindre fait par le parallelogramme, au ſolide fait par la roulette AIB, lors que le tout tourne ſur ladite circonférence ACB. Pour cét effet, je tire la ligne GDH parallele à ACB; & cette ligne ſe prend pour le chemin du point D centre de la roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI4 & le demi-cercle CEI, chacune en deux parties ſemblables: or il y a un Théoréme qui porte que, quand deux figures ſont ainſi coupées par une ligne parallele à la ligne ſur laquelle les figures ſont leur tour, les ſolides des figures ſont entr'eux comme les figures; & partant le ſolide fait par la figure AOI4 eſt égal au ſolide fait par la demi-circonférence IEC; car nous avons veû comme le plan AOI4 eſt égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé eſtre le quart du parallelogramme; & ainſi ces ſolides ſeront chacun le quart du cylindre fait par le parallelogramme. Mais ne prenant que le ſeul ſolide fait par AOI4 qui ſera le

le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne QRS qui repréſente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB ſur GDH, & la ligne VXY qui repréſente toutes les lignes tirées de NC ſecond quart, ſur la ligne courbe OYI: nous diſons que le quarré de QR eſt égal aux quarrez de QS & SR, moins deux fois le rectangle QSR, & ainſi des autres lignes tirées ſur ledit quart AN; & de plus que le quarré de VY eſt égal aux quarrez de VX, & XY plus deux fois le rectangle VXY, & ainſi des autres lignes tirées ſur le ſecond quart NC. Or les rectangles qui ſe trouvent dans l'eſpace AO ſont égaux à ceux de l'eſpace NI; & eſtant de plus d'un coſté & moins de l'autre, on les oſtera de part & d'autre. Il reſtera donc que les quarrez de QR, VY & des autres lignes tirées de AC ſur la ligne courbe AROYI pris tous enſemble, ſeront égaux aux quarrez du demi-diamétre QS ou VX pris autant de fois, & aux quarrez de SR, XY, & autres lignes tirées de GD ſur la ligne courbe AOI pris auſſi autant de fois. Or leſdites lignes SR, XY, &c. ſont des ſinus droits dont les quarrez ſont au quarré du diamétre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrez du demi-diamétre ſont aux quarrez du diamétre, comme 2 à 8. Si on joint ces raiſons, on aura celle de 3 à 8 qui eſt celle des quarrez des lignes tirées de AC ſur la ligne courbe AOI au quarré du diamétre pris autant de fois; & ſi on y joint la raiſon de la figure AOI4 au parallelogramme AI, qui eſt comme 2 à 8, on aura la raiſon de 5 à 8, qui eſt celle du ſolide que fait la roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant ſur ACB.

On conclura la meſme choſe en conſiderant les quarrez des ſinus verſes QR, VY, & les autres, leſquels ſont au quarré du diamétre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'eſpace ARI4 eſt au parallelogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raiſon de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle eſt la raiſon du ſolide de la roulette au cylindre, comme en l'autre concluſion.

 Mainte-

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la mesme roulette & son cylindre, lors qu'elle tourne sur LM parallele à AB, où il faut considerer que le quarré de N8 vaut les quarrez de NP & P8 moins deux fois le rectangle NP8; & ainsi le quarré N8 plus deux fois le rectangle NP8 est égal aux quarrez NP, P8. On sçait que les quarrez de N8, VK, & de toutes les autres sont au quarré du diamétre CI ou NP son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP8, VZK, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plutost toutes ces lignes sont au diamétre pris autant de fois, comme 2 à 8: & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du diamétre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N8, Q10, &c. comme 4 à 8; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 cy-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q9, NP, VZ, &c. representent les 8, il s'ensuivra que les quarrez 9 10, P8, ZK, &c. vaudront $\frac{1}{8}$; car puisque les quarrez Q10, N8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q9 10, NP8, VZK, &c. (qui tous ensemble avec lesdits quarrez vallent $\frac{9}{8}$) sont égaux aux quarrez Q9, 9 10, NP, P8, VZ, ZK, &c. ceux-cy vallent aussi $\frac{9}{8}$. Si donc on en oste les quarrez Q9, NP, VZ, qui vallent $\frac{8}{8}$, restera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P8, ZK, qui ostez encore des mesmes quarrez Q9, NP, VZ, restera $\frac{7}{8}$ pour le solide de la roulette, qui sera au cylindre comme 7 à 8.

La mesme chose se peut conclure d'une autre façon, en disant que le quarré P8 est égal aux deux quarrez PN, N8 moins deux fois le rectangle PN8, & tous les autres de mesme, sçavoir le quarré de ZK égal aux quarrez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainsi des autres. On a veû que les quarrez de N8 & les autres, sont au quarré du diamétre pris autant

autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le quarré de NP qui est 8, avec 5, on aura la raison de 13 à 8. De cette somme il faut oster le moins, sçavoir les rectangles PN8 & autres, tous lesquels ont mesme hauteur, sçavoir PN; ils seront donc entr'eux comme leurs bases VK, N8, Q10, & les autres. L'espace A8IDC rempli par les petites lignes VK, N8, &c. est au grand parallelogramme AI, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois sera audit parallelogramme, comme 12 à 8; & ostant la raison de 12 à 8 de celle de 13 à 8, restera celle de 1 à 8, comme cy-devant pour la valeur des quarrez ZK, P8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant considerer les solides qui se font quand la figure tourne sur LA, où on remarquera que la ligne IC parallele à ladite LA, coupe le parallelogramme AM & la figure AIB en deux également; & partant les solides sont entr'eux comme les plans; & ainsi le solide fait par AIB sera au cylindre formé par le parallelogramme AM, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre sera au solide de la roulette comme 4 à 3.

Considerons maintenant le solide fait par le plan de la compagne de la roulette AOITB On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallelogramme AM, que ladite figure AOITB; partant les solides seront entr'eux comme les plans: mais les plans sont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre sera au solide fait par AOITB, comme 2 à 1, c'est-à-dire double.

On conclura de là que le solide fait par la figure AOI 10 est au cylindre AI, comme 1 à 4; car puisque le solide fait par A8IDC est au cylindre AI comme 3 à 4: si on en oste le solide fait par AOIDC qui est au mesme cylindre AI comme 2 à 4, restera la raison de 1 à 4, pour celle du solide fait par AOI 10, au mesme cylindre AI.

PROPORTION DES SOLIDES

composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura mesme base & mesme hauteur, ensemble de leur centre de gravité.

PLANC. XXII. Fig. 2.

QUE AGEC soit une ligne irréguliére telle qu'on voudra, pourveu toutefois qu'elle baisse toûjours vers C; & soient tirées les lignes AB, BC, qui fassent un angle en B, lequel soit icy supposé estre droit, car cela n'est pas nécessaire, & on aura le triligne ABC. Que les lignes AB, BC soient divisées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB soit égale à chaque partie de BG: de chaque point de la division soient tirées des paralleles aux lignes AB, BC, qui divisent le triligne, comme on voit icy. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC; puis je conçois un plan sur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extremité de la perpendiculaire sur C en l'air. Ensuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires est égale à sa correspondante, sçavoir à celle qui va du point dont elle a esté tirée jusques à la ligne AB: comme la perpendiculaire tirée sur D sera égale à BD, celle qui est elevée sur F est égale à BF, & ainsi des autres. Il faut aussi concevoir un triangle rectangle isocelle qui se fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air sur C qui est égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extremité de ladite perpendiculaire: le plan de ce triangle est egal à la moitié du quarré BC; le mesme doit estre entendu de tous les triangles qui se font par le moyen du plan incliné, qui tous sont égaux à la moitié du quarré de leurs costez égaux.

Il faut en suite considerer une perpendiculaire élevée sur le point A qui chemine sur la ligne AGEC, & qui rencontre le plan incliné: cette ligne par son chemin décrit une superficie; & par con-

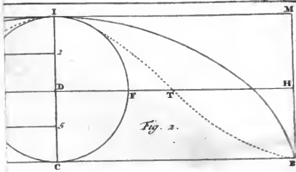


Fig. 2.

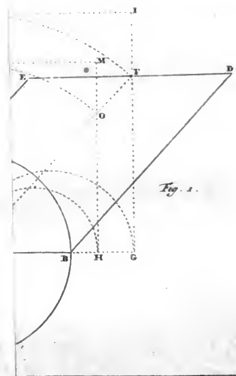


Fig. 1.

Roberval.

conféquent on a quatre fuperficies qui enferment un folide, la premiere eft le plan du triligne ACB; la deuxiéme, le plan incliné qui commence à AB; la troifiéme eft le triangle fur BC en l'air & perpendiculaire fur le plan ABC; la quatriéme eft celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGEC. Ce folide eft diftingué & comme compofé d'une infinité de triangles tous paralleles & femblables à celuy qui eft elevé perpendiculairement fur BC, & qui eft une des faces du folide; partant ce folide partagé de cette forte eft formé de la moitié de tous les quarrez de la ligne BC, & de fes paralleles.

Que fi on veut couper ce folide d'un autre fens, fçavoir par des plans paralleles à la ligne AB, alors on fera dans le folide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes enfemble feront égaux aux demi-quarrez de la ligne BC & de fes paralleles; car c'eft le mefme folide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne BC & de fes paralleles, font égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

Soit tiré une parallele à AB en quelque part qu'on voudra: que ce foit HI, fçavoir hors de la figure, & foit achevé le parallelogramme HICK, & foit élevé un plan fur la ligne HI, incliné en telle forte, qu'il rencontre comme le précedent, l'extremité de la perpendiculaire fur C en l'air prife de la longueur de IC; & foit auffi prolongé les lignes de la figure jufques à la ligne HI: on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutiffent à HI, font égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC, en les prolongeant jufques à HI, & dans l'efpace HIBA, fçavoir ABI, NDI, OFI, &c.

Nous confidérons maintenant la figure quand elle tourne fur HI. Alors elle forme trois folides, fçavoir un cylindre par HIBA; un folide qui fe nomme creux par la figure ACB; un autre par HACBI; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raifons

raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre, il est au grand cylindre comme le quarré de HA est au quarré de HK; le solide fait de HIBCA est au grand cylindre, comme le quarré de IC & des autres paralleles jusques à HA, sont au quarré de HK pris autant de fois; le solide de la figure ABC est au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB, pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois: & si on prend la moitié du solide, elle sera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez IC, & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal, sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI, & ils seront au grand quarré HK pris autant de fois, comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure ABC sur AB, alors la moitié du solide fait par ABC sera au cylindre fait par ABCK, comme la moitié des quarrez de BC & de ses paralleles, sont au quarré de BC pris autant de fois; & en general, sur quelque ligne qu'on fasse tourner la figure, pourveu qu'elle soit parallele à AB, on aura toûjours la mesme équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la mesme ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cét effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appuy & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pésent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'iceux pése; & tous ces centres ensemble viennent à estre égaux (eu égard à la pesanteur

teur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisiéme &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des costez de leurs figures; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de N D à F O, & de celle de B D à B F; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécedens est à celuy des consequens, sçavoir comme le parallelogramme N D B est au parallelogramme O F B: ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles, comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes A B, N D, O F, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pése sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne B C où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres cy-dessus representées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids est donc une ligne égale à toutes les lignes cy-dessus, & je dis ainsi, Toutes les pésanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un costé égal a toutes les lignes cy-dessus, & la ligne B M pour l'autre costé (car on prend icy les parallelogrammes qui estant perpendiculaires sur les lignes N D, O F, P L; &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne A B, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de C B, comme il a esté dit cy-devant.) Mais toutes les pésanteurs assemblées sont égales à la pésanteur qui est en M; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes B A, D N, F O, &c. pour un de ses costez, & B M pour l'autre: estant égaux ils auront mesme raison à une autre grandeur; c'est pourquoy tous les rectangles sont au grand

quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes susdites AB, ND, OF, &c. pour un de ses costez, & BM pour l'autre, est au mesme quarré pris comme cy-devant.

Au lieu de tous les rectangles susdits je prens ce qui leur est égal, sçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils feront donc au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle susdit qui à BM pour un de ses costez; & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. est audit quarré BC pris &c. Mais nous avons veû que comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait quand la figure tourne sur AB, ainsi le quarré BC pris autant de fois, est aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ses costez; & BM pour l'autre, est au quarré BC pris autant de fois, comme la moitié du solide fait par ABC est au cylindre. Par les indivisibles je fais des solides de tous ces plans, & je dis que la moitié du solide fait par ABC est au cylindre fait par ABCK, comme le solide qui a pour base la figure ABC, & BM pour hauteur, est au solide qui a pour base le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur; partant la moitié du solide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, font la raison composante des deux solides, qui sont entr'eux en la raison composée de la figure ABC au parallelogramme ABCK, & de celle de la ligne BM, à BC. Nous connoissons la raison composante, c'est à dire de la moitié du solide au cylindre; car (si c'est une parabole) son solide est a son cylindre comme 8 à 15: icy nous n'avons que la moitié du solide; c'est pourquoy ce sera comme 4 à 15. Pareillement la raison du plan de la parabole à son parallelogramme est connuë, qui est comme 2 à 3, ostant donc de 4 à 15 la raison de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reste celle de 6 à 15; & telle est la raison de BM à BC, & le point M est le centre.

Que

Que si nous feignons un cylindre tel qu'il soit la moitié d'un solide, & que nous disions, Comme le cylindre est à la moitié du solide, ainsi quelque ligne, comme *e*T est à la ligne BM; & comme le parallelogramme ABCK est au plan ABC, ainsi la mesme ligne *e*T est à la ligne BC: ces trois lignes composent la raison qui est entre la moitié du solide & le cylindre, qui sera la raison composée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M sera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder selon cette derniere façon il faut avoir trouvé cette ligne *e*T, faisant que, comme le plan ABC est au parallelogramme ABCK, ainsi la ligne BC soit à *e*T; & puis dire, Comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait par ABC tournant sur AB, ainsi la ligne *e*T soit à BM: le point M marque le centre de gravité. Cette méthode est pour agir plus élegamment, & plus briévement que par la premiere qui est plus seure, sçavoir par la composition de raison des deux solides qui sont entr'eux en la raison composée de celle de leur base, & de celle de leur hauteur, comme il a esté dit cy-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le solide qui se fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendroit en C, puis aprés du point C l'autre quart de cercle viendroit rencontrer la ligne AB prolongée tant que de besoin. Quand ce quart de cercle tourne sur AB, il se fait un solide de ce quart, & il se fait un cylindre du parallelogramme ABCK, lequel, en cette figure, est un quarré; car AB est égale à BC, & chacune est le demi-diamétre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité sçavoir le point M, en la façon ordinaire, sçavoir, que le demi-solide du quart de cercle, est à son cylindre comme le solide qui a pour base le quart de cercle, & pour hauteur la ligne BM, est au solide qui est composé du quarré BC pris autant de fois qu'il y a de divisions en BC. Mais les solides sont entr'eux en la raison com-

PLANC. XXII. Fig. 3.

composée de celle de leur hauteur, & de celle de leur base, sçavoir comme le quart de cercle, au quarré BC, & comme la ligne BM, à BC; en telle sorte que ces quatre termes composent la raison de la moitié du solide fait par le quart de cercle, à son cylindre, laquelle est connuë; car le cylindre est au solide comme 6 à 4; mais icy il n'y a que la moitié, & partant la raison sera comme 6 à 2. La raison du plan au plan, & de la ligne à la ligne, sera donc comme 2 à 6; la raison du plan au plan est connuë; car en cette figure, selon Archimede, elle est comme 11 à 14. Si donc je soustrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à estre le lieu du centre de gravité, en la premiere maniere.

La deuxiéme façon est en disant, Comme le cylindre de ABCK est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne *e*T à BM; (on trouvera la ligne *e*T comme cy-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallelogramme, ainsi la ligne BC est à *e*T) c'est pourquoy nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde methode.

La troisiéme methode est la plus subtile, & elle est telle: comme le quart & demi de la circonference, sçavoir AC & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à BC demi-diamétre, ainsi BC est au tiers de la ligne *e*T trouvée comme cy-dessus; & il se trouvera que BM sera le tiers de ladite *e*T; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que BM est le tiers de *e*T; de plus, que le quart & demi de la circonférence est à son demi-diamétre, comme le mesme demi-diamétre est à BM tiers de *e*T.

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, est à la moitié du solide fait par le quart de cer-

cle,

cle, ainsi la ligne *e*T soit à BM. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne *e*T sera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diamétre & le tiers de *e*T sont proportionnelles. Ceсy se démontre par la proportion troublée que je dispose comme il s'ensuiţ. Que le quart & demi de la circonference soit *a*; le demi-quart de la mesme circonference soit *b*; le demi-diamétre soit *c*; le mesme demi-diamétre soit aussi *d*; la ligne *e*T soit *e*; & le tiers de la ligne *e*T ou la ligne BM, soit *m*. On fera les proportions suivantes.

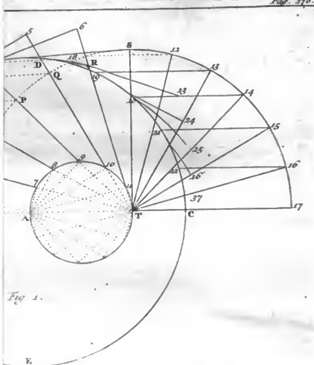
Comme *a* est à *b*, ainsi *e* est à *m*; & comme *b* est à *c*; ainsi *d* est à *e*; partant comme *a* est à *c*, ainsi *d* est à *m*; partant les trois lignes *a*, *c*, *m* sont proportionnelles, ce qui restoit à démontrer.

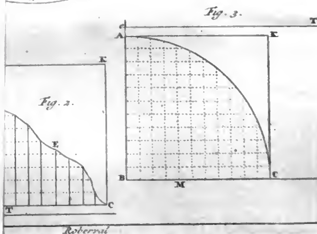
Tout ce qui a esté dit jusques à present ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse estre, soit droite, circulaire, ou irréguliere.

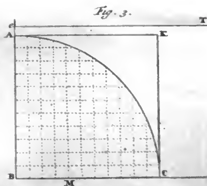
TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE de la ligne AGEC.

SOIT divisé la ligne AGEC en une infinité de parties égales; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme cy-devant, soit aussi tiré des paralleles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pésanteur; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est represénté par le point de sa division: les paralleles portent chaque pésanteur sur le levier BC aux points de sa division; & c'est sur ces points de BC que pésent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles; c'est à dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le re- PLANC. XXIII. Fig. 1. 2.

rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire, comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un costé égal, sçavoir la portion de la ligne AGC. Je feins que le centre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pésanteur ; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM ; le poids du point I est au poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pésans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pésant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. est au rectangle fait par la ligne AGC penduë au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne ; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs costez sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'oste par les indivisibles la portion de la ligne AGC : cette portion estant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini ; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ny ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui est égal au mesme rectangle de AGC par BM. Je pose que la ligne AGC soit la droite TN, laquelle estant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle TP dont le costé NP est égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son costé soit la


5
6
S
12
13
14
15
16
17
D
R
Q
P
18
19
23
24
25
26
37
A
T
C
E
Fig. 1.


K
Fig. 2.
E
T
C


Fig. 3.
T
A
K
B
M
C

Roberval

la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne AGC est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne BM cherchée; & cecy est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainsi cette mesme ligne qui est le costé dudit quarré, est à la ligne BM cherchée; & ainsi ces trois lignes, sçavoir la donnée, celle qui est le costé du quarré susdit, & la cherchée BM sont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AEZ. Alors il faudra dire, Comme la ligne AEZ étenduë en ligne droite est à son demi-diamétre BZ, ainsi ce demi-diamétre est à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence est au demi-diamétre, comme tous les sinus tirez par les points esquels est divisée la circonférence, sont au sinus total pris autant de fois; or tous ces sinus sont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence divisée en parties égales infinies; & tous ces sinus sont égaux au quarré du demi-diamétre, comme il paroist par la troisiéme Proposition.

Mais si on suppose que la ligne AC soit droite, pour en trouver le centre de gravité je la divise en une infinité de parties égales, & de chaque point de la division je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent sur le levier BC & le divisent en parties égales entr'elles, & divisent la figure ABC en triangles semblables: les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne proposée AC. Or tous ces centres ou pésanteurs sont entr'elles, comme les rectangles sont entr'eux, c'est à sçavoir, comme le rectangle BF par AD est au rectangle BI par DH ou son égale AD; & d'autant que la portion de AC est toûjours la mesme en tous les rectangles, les centres sont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de sorte que ces petits centres ou pésanteurs particulieres sont au centre ou pésanteur PLANC. XXIII. Fig. 3.

teur totale qui eſt au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & péſanteur à la ligne AC) comme toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ſont au rectangle AC par BM; car par les indiviſibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, ſçavoir de AD & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. priſes enſemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui ſoit égale en puiſſance à l'eſpace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, ſçavoir AC, eſt à cette ligne dont le quarré eſt égal à l'eſpace & plan ſuſdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainſi cette ligne ou coſté de quarré eſt à BM; en ſorte que la ligne ſuſdite qui peut l'eſpace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. ſoit moyenne proportionnelle entre la ligne propoſée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes ſont à BC pris autant de fois, comme le triangle au quarré de la ſomme ou multitude deſdits points, c'eſt à dire, comme 1 à 2; partant la ligne BM vaudra en puiſſance le quart du quarré BC; & partant BM eſt la moitié de BC; & ainſi le centre de ladite ligne propoſée eſt au milieu d'icelle: car du point M tirant une ligne parallele à AB, elle paſſera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de ſon centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure ſolide, ſoit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, ſolide elliptique, ou de quelqu'autre ſolide connû. Parlons premiérement du cône qui eſt repreſenté par la ligne AC, & par CB tirée perpendiculairement ſur AB. Le ſommet du cône eſt C, l'axe eſt CB, & la ligne AB eſtant doublée vient à eſtre le diamétre du cercle, ou baſe du cône. Que l'axe de ce cône, ſçavoir BC, ſoit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales: toutes ces diviſions ſont autant de cercles; qui tous enſemble par les indiviſibles compoſent le cône, & ſont entr'eux comme les quarrez de leur diamétres; ſçachant donc comme les diamétres ſont entr'eux, on

ſçaura

sçaura aussi la proportion des quarrez. Or cette division fait dans le cône & sur son axe des triangles semblables, comme ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'est pourquoy les demi-diamétres AB, DF, HI, KL &c. sont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC sont entr'elles : or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diamétres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diamétres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarrez garderont l'ordre naturel des quarrez desdits nombres; & partant ces cercles seront entr'eux comme les quarrez des nombres qui suivent l'ordre naturel; c'est à dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela posé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent la mesme proportion, c'est à dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au mesme lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E (fig. 4.) : son axe est ER; & la touchante EN representera l'axe du cône BC. Je divise EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (representant AB) qui divisent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3 : on dira donc, Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi NE sera à une autre ligne V; partant V sera triple de NE; & si NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite, Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne OEN qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui sera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC estant 4, BS sera 1, & CS sera 3.

 CEN-

CENTRE DE GRAVITÉ

du Conoïde parabolique.

SI je cherche le centre de gravité du Conoïde parabolique, je le couperay, ou fon axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviferont tout le folide en cercles (car dans le conoïde parabolique auffi bien que dans le cône, les fections faites par un plan parallele à la bafe, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles font entr'eux comme les quarrez de leurs diamétres; & partant fçachant comme les diamétres font entr'eux, nous fçaurons comment font leurs quarrez. Mais dans la parabole les quarrez des ordonnées font entr'eux comme les portions de l'axe : icy les portions font égales; & partant ils font entr'eux comme les nombres naturels; les quarrez des diamétres feront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré eftant 1, le fecond fera 2, le troifiéme fera 3 &c.

PLANC. XXIII. Fig. 34. Par noftre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette mefme proprieté. Je trouve que le triangle fait la mefme chofe; il faut donc feindre que ABC eft un triangle. Je divife BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB: or BC reprefente l'axe du folide dont on cherche le centre. Cela fait je dis, Comme le plan du triangle eft à fon parallelogramme, ainfi BC eft à la ligne V. On fçait que le triangle eft au parallelogramme comme 1 à 2; partant V fera double de BC; fi BC eft 3, V fera 6. Aprés on dit, Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle eft à la moitié du folide, ou du cône fait par le triangle, ainfi la ligne V fera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre fufdit eft à la moitié du cône comme 6 à 1; partant BM fera $\frac{1}{6}$ de la ligne V, & le tiers de BC; le centre de gravité du conoïde parabolique fera donc au tiers de fon axe du cofté de la bafe; & ainfi divifant

l'axe

l'axe en trois parties égales, le premier point du costé de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, aprés avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide: il faut trouver un plan duquel la proprieté soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles: si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent estre entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit estre telle dans le plan: observant toûjours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diamétre, au quarré du demi-diamétre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbe ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chaqu'un desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition que la derniére comme DG estant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S, &c. qui partant seront tous plus éloignez de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à estre parallele à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallele à CG; du point E, la ligne EP égale & parallele à HC; de F, la ligne FQ égale & parallele à IC; semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC, & ainsi des autres points infinis, la ligne CS estant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infini, laquelle viendra à estre assymptote au regard de la ligne qui se forme par l'ex- PLANC. XXIV. Fig. 1.

l'extrémité des lignes tirées des points de la diviſion paralleles à CS, qui eſt la ligne courbe COPQYZ. Puis aprés, ſi du point C on tire des lignes à chaque point de la diviſion de la courbe BFA, tout l'eſpace AFBC viendra à eſtre diviſé en ſecteurs infinis, leſquels par les indiviſibles ſe convertiſſent en triangles, à cauſe que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la diviſion infinie. Je dis davantage que tout l'eſpace BFACQZ juſques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui eſt entre ladite courbe, & la touchante B tirée auſſi à l'infini, ſe trouve diviſé en parallelogrammes infinis, l'un deſquels eſt DOCG qui repreſente le moindre. C'eſt un parallelogramme, parce que dans les indiviſibles la touchante DG paſſe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a eſté dit cy-devant dans une autre Propoſition : or DO a eſté faite égale & parallele à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correſpondantes en CS.

Pour venir à la concluſion, les parallelogrammes ont tous un meſme coſté que les triangles, qui eſt chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour ſommet le point C duquel partent les deux coſtez du triangle, & dont le troiſiéme eſt la portion de la courbe BFA diviſée à l'infini ; tous ces triangle, dis-je, qui rempliſſent l'eſpace AFBC, partent du point C comme de leur ſommet. Mais les parallelogrammes qui ſont ſur baſes égales & entre meſmes paralleles que les triangles, ſont doubles deſdits triangles, & les uns & les autres ſont entre les paralleles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP ſont ſeulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes ſont entre les meſmes paralleles, & ſur des baſes égales ; car les baſes des uns & des autres ſont les portions de la ligne courbe diviſée à l'infini, & les portions des touchantes compriſes entre les paralleles à CA paſſent & ſont priſes pour ces portions de courbes compriſes auſſi entre les meſmes paralleles.) Puiſ-

Puiſque les parallelogrammes ſont doubles des triangles, par les indiviſibles, l'eſpace qui eſt occupé par leſdits parallelogrammes, lequel ſe trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet eſpace, ſçavoir le quadriligne ZBFACQZ ſera double de l'eſpace AFBC. Mais l'eſpace AFBC eſt celuy qui eſt fait par les triangles; partant il ſera égal à l'autre eſpace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ eſtant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ eſt aſymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG eſt égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la meſme touchante, & ainſi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui ſort du point B, & qui devroit rencontrer la meſme ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fuſt égale à la portion de la ligne CAI prolongée & compriſe entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il eſt impoſſible que la touchante en B la puiſſe rencontrer, puiſqu'elles ſont paralleles; ainſi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce ſoit, & partant elle eſt aſymptote.

Conſidérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. ſur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. ſur l'axe C 10, ſuppoſant que la figure ABC ſoit une parabole. PLANC. XXIII. Fig. 5.

Soit D 1 la premiére ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal a GC, & auſſi à 1 6; & ſi des deux lignes égales GC & 1 6 on oſte la ligne C 1 qui leur eſt commune à toutes deux, il reſtera G 1 égale à C 6. Or par la propriété de la parabole, G 1 eſt diviſée en deux également par le ſommet A; partant C 6 eſt double de A 1; & ainſi de tous les autres; ſçavoir C 7 ſera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainſi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC ſont entr'elles,

tr'elles, ainsi les doubles parties feront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrez des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe feront aussi entr'elles, comme les quarrez des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure CZ 10) sçavoir, comme le quarré de O 6 est au quarré de P7, ainsi C6 est à C 7; d'où il s'ensuit que la figure CZ 10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G 1 soit triple de A 1, alors C 6 sera triple du mesme A 1, & la parabole CZ 10 sera triple de la parabole ABC. La mesme chose se fera toûjours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré-quarrez, quarré-cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera la quadrature de la parabole. Pour cét effet il faut considerer dans ABC que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure CZ 10, je la puis considerer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre CI en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à CI, comme à la figure précedente, & partant elle doit rencontrer la ligne CI.) De ce mesme point B on tire BZ parallele à CI qui recontrera la ligne CQZ; car cette ligne n'est formée que par l'extremité des lignes paralleles à CA. Du point de la rencontre soit fermée la figure CQZ 10. Les ordonnées de la parabole ABC seront égales aux ordonnées de la parabole CZ 10. Mais les portions de l'axe de la parabole ABC ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole CZ 10; partant celles-cy sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole CZ 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole ABC; & partant la parabole CZ 10 sera double de ABC, ou du triligne qui luy est égal BCQZ; & le pa-

parallelogramme CBZ 10 triple de la mesme parabole ABC; donc ladite parabole CZ 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme CBZ 10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole puisque j'ay un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archiméde s'estant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de mesme la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes DA 1, & OCL sont égaux; & pour cét effet ayant tiré la ligne droite CD, je dis que le triligne CDA est la moitié du quadriligne CODA: si donc de ce quadriligne j'oste le parallelogramme CLD 1, il restera les trilignes COL & AD 1; si du triligne on oste le triangle CD 1, il restera le triligne DA 1; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ay tiré une partie double d'une partie que j'ay tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit estre double du reste de la petite, & de cette sorte DA 1, & LCO sont doubles de DA 1; donc DA 1 sera égal à LCO, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne CD coupe en deux également le quadriligne CODA (car il n'est pas toûjours véritable.) Pour cét effet on suppose OD pour un des costez du parallelogramme, & pour l'autre la portion DA indivisible sur la touchante DG ou sur la ligne courbe DA qui est la mesme chose, & le triangle CDA avec la mesme portion indivisible DG ou DA. Je dis que le parallelogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mesmes paralleles, sçavoir OC & DG; ainsi CD coupe le parallelogrammé, ou pour mieux dire, le quadriligne ODAC en deux également; car nous ne considérons plus l'espace DAG ni celuy qui est compris entre la courbe OC & la droite OC; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir

voir CD, CE, & les autres à l'infini ; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace ABC comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes DO, EP, FQ, &c.) remplissent l'espace ZBACQZ, soit que les lignes BZ & CQZ se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe AC. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes ; comme le cylindre fait sur l'axe CA par le parallelogramme CADO ; le cône fait sur la mesme CA, & par le triangle CAD ; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur mesme base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en mesme raison ; & partant le solide fait de ABC sera le tiers du solide ZBACQZ ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontrent point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce costé-là, & ostant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du mesme ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considerer ces figures comme paraboles ; & par consequent la touchante du point B, ou plûtost la ligne tirée de B parallele à AC rencontrera la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales ; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas

d'embas sera double de celuy d'enhaut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a veû que le solide de AB estoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10; & ainsi le solide de CZ 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

Il faut maintenant considerer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extremité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chaqu'un desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinis: de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

On considerera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend icy que les lignes DO, EP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand mesme les lignes A 16 & B 16 estant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la mesme chose plus briévement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, estant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCAB est égal à BCA 16; ostant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a esté cy-devant mon-

Oo tré

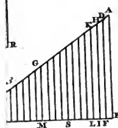
tré égal à ABC, & partant 16 AB luy eſt auſſi égal.

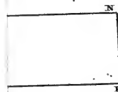
Maintenant ſoit ABC la premiére parabole, la touchante BI rencontrant CI, la ligne B 16 égale & parallele à CI rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I ſera une parabole égale & ſemblable à ABC: car les ordonnées de l'une ſont égales aux ordonnées de l'autre, ſçavoir D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puiſqu'elles ſont entre les meſmes paralleles; & par la proprieté de la parabole, AG eſt égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. ſçavoir les portions de l'axe où aboutiſſent les ordonnées correſpondantes ſont égales; & partant toute la parabole ABC ſera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'eſpace BA 16 eſt égal à ABC; partant les trois piéces ou eſpaces ABC, A 16 I, & BA 16 compriſes dans le parallelogramme ICB 16, & qui le forment, ſont égales entr'elles.

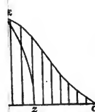
Ce que nous venons de dire icy de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui eſt la meſme choſe, ſe doit entendre auſſi des paraboles des autres genres; c'eſt-à-dire que, ſi la parabole ABC eſt du troiſiéme genre, la parabole A 16 I ſera auſſi du troiſiéme genre; mais elle ne ſera pas la meſme que la parabole ABC; car les parties AG, AH, AR, &c. ſont bien entr'elles en meſme raiſon, que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais AG n'eſt pas égale à A 1, ni AH égale à A 2 &c. comme elles ſont dans la parabole du premier genre.

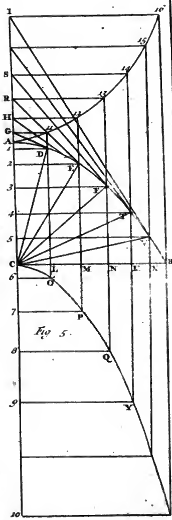


DE









Roberval.

DE

TROCHOIDE EJUSQUE SPATIO.

AUCTORE

ÆGIDIO PERSONERIO DE ROBERVAL.

DE

TROCHOIDE
EJUSQUE SPATIO.

DEFINITIONES.


I circulus duplici motu simul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur secundùm lineam rectam: altero autem circulari, quo ipse cum omnibus suis radiis circa centrum suum circumvolvatur; sitque uterque motus sibi ipsi semper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum spatio unius integræ conversionis circumferentiæ, intelligatur esse eidem circumferentiæ æqualis: atque inter movendum circulus ipse perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motûs: ejusmodi circulum vocamus *Rotam*.

Recta per quam fertur centrum, vocetur *Iter centri*.

Quæcunque puncta vel lineæ a circulo denominantur, denominentur hic a rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam: vocetur hæc *Via rotæ*.

Manifestum est quoque quidquid accidat in quâvis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcunque aliâ: modo initia circumvolutionum sumantur a radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituant, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam viæ rotæ quam itineri centri, eumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ in-

tegrâ converſione, idem ab eadem parte fiat rurſus iiſdem viæ rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *Radius principii motûs:* in medio autem dum ipſe perpendicularis eſt itineri centri, ſed ad alteras partes conſtitutus, dicetur *Radius medii motûs:* & tandem in fine, *Radius perfecti motûs.*

Quòd ſi radius ipſe in quâcumque poſitione produci intelligatur utrinque quantùm libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur ſumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipſum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrà, cujus puncti motus ſpectetur: fiet neceſſariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipſum punctum deſcribat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte exiſtat; ea autem incipiet in lineâ principii motus, & in lineâ perfecti deſinet. Vocetur hæc motûs *Trochoides.*

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, eſtque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejuſdem Baſis.* Portio lineæ medii motûs intercepta inter trochoidem & baſim ejus, *Axis trochoidis* vocabitur; qui quidem axis ab itinere centri bifariam ſecabitur in puncto quo dnos *Centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* eſt extremum axis punctum in trochoide exiſtens, ſeu baſi oppoſitum.

Jam manifeſtum eſt a trochoide & ab ejuſdem baſi comprehendi ſpatium quoddam planum; quod nos poſtea vocabimus *ſpatium trochoidis.* Ejus centrum, baſis, axis & vertex iidem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur uſque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem Ordinata.*

Item, menſura integri motûs converſionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ: menſura dimidii motûs intelligatur dimidia

midia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eâdem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam rotam. Et siquidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur a rota simplici, diceturque *Trochoides rotæ simplicis*, seu *Trochoides veræ rotæ*. Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quam rota, tunc trochoides denominabitur a rotâ contractâ, diceturque *Trochoides rotæ contractæ*. Si tandem circulus minor sit ipsâ rotâ, ejus trochoides denominabitur a rotâ prolatâ, diceturque *Trochoides rotæ prolatæ*. Spatia, bases, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem sortiantur: at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis iis quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem: nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars inferior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad easdem partes ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundùm motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ: geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in altera, eædem erunt mediæ; spatia autem longè diffe-

different cùm figurâ tum magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hìc de trochoide rotæ tam simplicis quam prolatæ & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem a nobis inventam (ut cætera quæ ad rotam pertinent) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonstrationem requirant, tamen ea tam facilis est, ut cuivis in Geometriâ mediocriter versato statim appareat, qualia sunt hæc. In primo quadrante integræ conversionis rotæ punctum quod trochoidem describit, percurrit spatium quod est inter basim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto posterius est centro rotæ. In secundo quadrante idem punctum percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad verticem trochoidis, estque adhuc posterius centro rotæ. In tertio quadrante punctum idem percurrit spatium quod est a vertice trochoidis usque ad iter centri, sed jam hoc punctum præcedit respectu centri, quod sequitur si motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad basim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ sequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibusdam aliis quæ naturam rotæ motæ, ut dictum est, statim consequuntur, demonstrabitur facilè trochoidem quæ fit ab unicâ conversione cujuscunque rotæ in seipsam non recurrere, seu per idem punctum bis transire non posse: contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, si aliud à nostra sumeretur principium.

Nec minus facile est demonstrare eam trochoidis partem, quæ est

est a principio usque ad verticem æqualem esse & similem alteri parti quæ est a vertice usque ad finem, & ambas partes sibi invicem congruere posse. Item, primam medietatem ejusdem trochoidis totam esse ab unà parte axis, secundam verò totam esse ab alterâ. Idem dictum intelligatur de duabus partibus spatii ipsius trochoidis quæ ab ejusdem axe constituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonstrabuntur, in alterâ quoque medietate demonstrata esse quivis facilè intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ sunt prope verticem &c. His positis primaria trochoidis proprietas, quam propterea demonstrabimus, videtur esse hæc.

PROPOSITIO PRIMA.

Si ab assumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata sit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circulum ipsi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui mensurat eam partem motûs, quæ restat inde ab eo tempore, quo notatum est a puncto mobili punctum assumptum, usque ad medietatem integræ conversionis rotæ.

ESTO recta EP; iter centri rotæ cujusdam æqualis circulo seorsim posito SOMZ, cujus centrum T; sitque recta CEA linea principii motûs: intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL sit linea perfecti motûs. Tum divisâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ sit linea medii motus; puncta autem A, F, L sint ad easdem partes respectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad easdem quidem partes inter se, sed ad alteras respectu ejusdem rectæ EP, & punctorum A, F, L. TAB. XXIV. Fig. 2. 3.

Concipiatur jam in linea principii motûs CEA assumptum esse punctum A, ad describendam trochoidem, sive recta EA æqualis sit semidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ simplicis; sive ipsa EA major sit quam TO, ut fiat trochoides

choides rotæ contractæ: sive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ prolatæ; moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipsa motu circulari absol erit unam integram conversionem circa idem centrum, posito utroque motu sibi ipsi semper uniformi: feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integræ conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ PL; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto punctum A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL; axis HF, vertex H, centrum K, & spatium ARYHLA; sint etiam puncta A, F, L in eâdem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versùs principium quidem in I, versùs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsa major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, a quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extra circulum FIH. Quia cum punctum Y est in prima medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quâ illâ existente notatum est punctum Y, atque in illâ positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 8 7 9 parallela lineæ medii motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia

quia ducitur a centro rotæ 7 in hâc positione, ad punctum Y, quod in eâdem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ EA, seu potius recta 7Y erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in 7, punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundùm angulum 8 7 Y: huic ergo angulo constituatur æqualis OT 4 rotæ seorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum 4 in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro 7, & angulo OT 4 angulo 8 7 Y, sive latera æqualia sint, sive non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum O 4 esse mensuram motûs jam peracti a principio conversionis; & arcum 4 Z qui cum O 4 complet semicircumferentiam rotæ, esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem: & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam E7 æqualem esse arcui O 4, & rectam 7K arcui 4Z: quod notetur.

Centro 7, intervallo autem 7 Y, vel 7 8, vel 79, quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit 8 7 9. Quoniam ergo per ea quæ posita sunt, punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri 8 9 versùs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter 8 9 inter qunctum Y & axem HF, eademque secabit rectam YD ordinatam ad axem, esto in puncto 6: rectæ ergo DH, 6 9 æquales sunt, sicuti & rectæ FD, 8 6; & rectangulum FDH, æquale rectangulo 8 6 9, quæ rectangula cum sint æqualia quadratis XD, Y6, erunt hæc quadrata æqualia, & recta DX æqualis rectæ 6 Y: sed recta DY major est quam 6 Y, totum scilicet parte; ergo eadem DY major est quam DX; excessus autem est portio XY; hæc itaque portio est extra circulum FXH trochoidi AYH proprium; quod primo loco demonstrandum erat.

 Dico

Dico secundò eandem portionem exteriorem XY, æqualem esse arcui 4 Z. Quoniam enim ostensæ sunt æquales DX, & 6Y, sunt autem puncta X, 6, vel simul, vel sejuncta, & hoc casu vel punctum X est inter puncta D & 6, vel e contrario ipsum X est inter puncta 6, Y, secundùm diversas species trochoidum rotæ simplicis, prolatæ, vel contractæ, quod hoc loco nihil refert: quidquid sit, additâ vel subtractâ communi X 6, si quæ inter puncta X, 6, interjaceat, fiet recta D 6 æqualis rectæ XY, est autem D 6 æqualis rectæ K 7, seu arcui 4 Z, ut notatum est; quare & recta XY eidem arcui 4 Z est æqualis, quod secundo loco demonstrandum erat: quare constat Propositio.

Corollarium primum.

HINC manifestum est arcum XH similem esse arcui rotæ 4 Z, sicuti arcus FX similis est arcui O 4; & est 4 Z quicunque arcus mensurans motum qui deest ad dimidiam conversionem, & O 4 mensurat motum jam transactum, quod notasse in sequentibus usui erit.

Corollarium secundum.

HIC demonstrari potest in rotâ simplici, atque in prolatâ rectam 6 D majorem semper esse quàm XD, propterea quod ipsa rota seu circulus O 4 Z tunc æqualis est circulo proprio FXH, vel ipso major; ideoque arcus 4 Z, æqualis est arcui XH, vel ipso major, quia similes sunt ipsi arcus. Sed recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, ex demonstratis; quare eadem 6 D æqualis est arcui XH, vel ipso major: arcus autem XH semper major est rectâ XD; quare hoc casu recta 6 D semper major est quàm XD.

In rotâ autem contractâ, quia ipsa Rota minor est quàm circulus sibi proprius FXH, atque ideo arcus 4 Z semper minor est arcu sibi simili XH, secundùm rationem diametri rotæ ad diametrum

metrum circuli sibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis est arcui 4 Z, semper minor arcu X H, secundùm eandem rationem; hic autem arcus X H, quia assumptus est utcunque minor semicircunferentiâ circuli proprii F I H, potest habere ad rectam X D quamcunque rationem majoris ad minus, scilicet ut diameter F H, ad diametrum rotæ O Z. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus X H ad rectam X D eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis esse rectæ X D, vel ipsâ major aut minor: atque ita punctum 6 erit vel simul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quòd res ita se habeat in universum ex his satis patet; quibus autem in punctis quave positione rotæ omnes istæ differentiæ accidant in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli sibi proprii demonstrare longum esset & difficillimum, opusque esset hoc assumpto; scilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi posse rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

Corollarium tertium.

ILLUD quoque ex demonstratis statim apparet, scilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli sibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantùm lineas ipsas sese tangere, ipsumque circulum totum contineri intra spatium ejusdem trochoidis.

Corollarium quartum.

HINC præterea clarum est ipsam trochoidem non esse lineam rectam nec ex duabus rectis compositam, siquidem illa a puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut secat circulum proprium F X H, quem secaret necessario si recta esset a puncto A ad punctum H, sive a puncto H ad punctum L: non

est ergo recta, nec ex duabus rectis composita.

Quod autem cujuscunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere possit, sed omnes partes sint curvæ, atque penitus ab aliis quibuscunque curvis huc usque notis diversæ, demonstrari quidem potest, sed demonstratio longa est & difficilis, neque hujus loci, quandoquidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

Corollarium quintum.

QUIA in antecedenti Propositione punctum 6 est sectio communis rectæ ordinatæ Y D & rectæ 8 7 9, quæ est diameter circuli 8 Y 9, qui concentricus est rotæ ita positæ ut centrum illius sit 7: si intelligatur alia atque alia positio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam E K, manifestum est aliud atque aliud fore ipsum punctum 6; ipsumque moveri incipere a puncto A, & in medio motus integræ conversionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipsum ferri secundùm lineam quandam A 6 H secantem rectam E K in puncto V. Quòd si idem ferri intelligatur a puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejusdem novæ lineæ, secans rectam K P in puncto 10; atque ideo ipsa integra erit A V 6 H 10 L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, seu *sociam*.

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eâdem denominetur. Item, quæ a trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est A Y H V A, inter lineas principii & medii motus: alterum vero ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula a duabus illis lineis simul nomen sortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta a quocunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

PRO-

PROPOSITIO SECUNDA.

Si a quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem, quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinatæ ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.

MANIFESTA est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Esto enim YD recta quæcunque a puncto Y in trochoide existente ad axem FDH ordinata, & ponantur eadem quæ superiùs. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6 D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta vero XY interjicitur inter trochoidem & circumferentiam convexam circuli ipsi proprii. Ostensum autem est rectas ipsas 6 D & XY esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

Corollarium primum.

HINC manifestum est eandem ordinatam 6 D æqualem esse arcui rotæ 4 Z.

Corollarium secundum.

PERSPICUUM est etiam rectam Y 6, quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ XD interjectæ inter circumferentiam circuli proprii & axem.

Corollarium tertium.

SED & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurrere circunferentiæ circuli proprii in vertice tantum, atque in eo solo puncto lineas ipsas sese contingere. Quod idem acci-

unâ earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis sit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motûs, & reciprocè.

PONANTUR eadem quæ suprà in eâdem figura; atque in linea A 13 V, primo scilicet quadrante comitis, sumptum sit punctum quodcunque 13, a quo ad axem FH ordinata sit recta 13 14, quæ minor erit quam AF, quia ipsa AF æqualis est semicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipsâ semicircumferentiâ minor. Producatur ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ principii motûs AC in puncto 12. Tum in axe FH intelligatur portio KD æqualis portioni K 14, sed ad diversas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ KE, occurrens comiti quidem in puncto 6, quod erit in secundo ipsius quadrante, lineæ autem AC in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11, & reciprocè rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam FIH in puncto 15; & recta 11 D secet eandem circumferentiam in puncto X, sintque puncta 15, X, in eâdem semicircumferentiâ quæ est versùs principium motûs: item in semicircumferentiâ rotæ OSZ, sit arcus Z4 similis arcui HX, & arcus Z16 similis arcui H15; sintque ZS, & OS quadrantes, sicuti HI, & FI. Jam quia æquales sunt rectæ K14, KD erunt arcus IX, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F15, HX; & æquales FX, H15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S4, S16. Item æquales arcus O16 & Z4; & æquales O4, Z16. Quare ex Corollario primo Propositionis primæ, quia arcus HX similis est arcui qui mensurat motum, qui superest ad dimidiam conversionem in eâ positione rotæ, erit arcus Z4 ea ipsa mensura ejusdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z16 mensura motûs qui superest ad dimidiam conversionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac propterea ex Corollario primo Propositionis secundæ, tùm recta 6D æqualis est arcui 4Z, quam recta 13 14 æqualis arcui 16Z: ambo autem ipsi arcus

cus 4 Z & 16 Z simul sumpti æquales sunt semicircumferentiæ O Z (ostensus est enim arcus 4 Z æqualis ipsi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 simul sumptæ æquales sunt eidem semicircumferentiæ O Z, sive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus sequitur rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO QUARTA.

Quod a trochoidis comite & ab ipsius base continetur, spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite, sumpto axe communi pro altitudine.

In eâdem rursus figurâ. Dico spatium quod a comite A V H 10 L & basi ejus A L continetur, dimidium esse rectanguli A C N L, cujus eadem est basis A L & eadem altitudo axis F H. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium A C H F, quod a curvâ A V H ipsius comitis dimidia, in duas partes dividitur, quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ A V H & duabus rectis A F, F H, altera autem pars continetur ab eâdem curva A V H & duabus rectis H C, C A. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere, posito scilicet puncto C cum puncto F, & rectâ C A cum recta F H; item recta C H cum recta F A: tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14, congruet punctum 11 cum puncto 14, & recta 11 6 cum recta 14 13, cui æqualis ostensa est; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ H D, & recta 12 13 rectæ D 6, cui æqualis ostensa est, & reliquæ reliquis, & omnes omnibus & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia, & spatium A V H F A dimidium est rectanguli F C. Idem verò in reliquo rectangulo F N ostendetur eodem modo, ideóque vera est Propositio.

PRO-

PROPOSITIO QUINTA.

Idem spatium proportione medium tenet inter duplum rotæ & duplum circuli trochoidi proprii.

PONANTUR eadem. Dico spatium AVH 10 LA proportione medium esse inter duplum rotæ OSZM, & duplum circuli FIHG trochoidi proprii. Intelligantur enim duo rectangula, alterum quidem 20 21, cujus basis 19 20 æqualis sit semicircumferentiæ rotæ OSZ, altitudo vero 19 21 æqualis diametro ejusdem rotæ OZ; alterum verò rectangulum 23 24, cujus basis 22 23 æqualis sit semicircumferentiæ circuli proprii FIH, altitudo autem 22 24 æqualis diametro ejusdem circuli FH. Jam quia duo rectangula 20 21 & FC æquales habent bases 19 20 & AF (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ OZ ad FH diametrum circuli proprii. Item, rectangulum FC ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis FH, ex constructione, se habet ut basis AF ad basim 22 23, id est ut semicircumferentia rotæ OSZ ad semicircumferentiam circuli proprii FIH, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia OSZ ad semicircumferentiam FIH, ita diameter OZ ad diametrum FH: quare ut rectangulum FC ad rectangulum 23 24, ita diameter OZ ad diametrum FH. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum FC; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum FC, quæ ejusdem rectanguli FC ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri OZ ad diametrum FH. Sed rectangulum 20 21 duplum est rotæ OSZM, ut ex Archimede in circuli dimensione deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli FIHG; & rectangulum FC æquale est spatio proposito AVHLA, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportiona- Tab. XXIV. Fig. 4. 5.

 lia

lia ostensa sunt rectangula 20 21, FC, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ OSZM, spatium AVH10LA, & duplum circuli proprii FIHG, & medium esse spatium AVH10LA, ut proponebatur.

Corollarium.

HINC patet idem spatium AVH10LA in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolatæ idem spatium minus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ contractæ, majus quam duplum ipsius rotæ. Nam in rotâ simplici circulus FH ipsi rotæ æqualis est; in prolatâ minor; in contractâ major: unde spatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli FH mediam tenet proportionem, in simplici quidem æquale est duplo rotæ; in prolatâ minus quàm duplum; & in contractâ majus.

PROPOSITIO SEXTA.

Quod a trochoide & ejus comite continetur spatium inter lineas principii & medii motûs, æquale est dimidio circuli eidem trochoidi proprii.

TAB. XXIV. Fig. 2. IN eâdem figurâ esto spatium ARHVA contentum a dimidio trochoidis ARH, & dimidio comitis ejus AVH inter lineas principii & medii motûs AC, FH. Dico hoc spatium æquale esse semicirculo FIH.

Ducatur enim quæcunque recta YD parallela basi AL, secansque tam spatium quàm semicirculum; & portio quidem ipsius YD intercepta intra spatium, sit Y6; portio autem intercepta intra semicirculum, sit XD: manifestum est igitur ex Corollario secundo Propositionis secundæ, portiones ipsas Y6 & XD esse æquales; quod idem in cæteris similiter ductis basi AL parallelis accidet. Itaque quoniam spatium & semicirculus sunt intra parallelas AF, CH & cujusvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & inter-

interjacentis portiones in ſpatio & in ſemicirculo interceptæ ſunt æquales, ſequitur ſpatium ipſum ARHVA ſemicirculo FIH eſſe æquale: quod erat oſtendendum.

Corollarium primum.

POTEST ſimili argumento demonſtrari ſpatium ARYHIFA, quod a dimidiâ trochoide ARH, dimidiâ circumferentiâ HIF, & dimidiâ baſi FA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHFA, quod a dimidiâ comite AVH, diametro HF, & dimidiâ baſi FA comprehenditur. Quia ſcilicet ipſa duo ſpatia ſunt in iiſdem parallelis AF, CH: & ductâ quâcunque eiſdem intermediâ parallelâ YD, oſtenſum eſt ſecundâ Propoſitione portionem YX priori ſpatio interceptam, æqnalem eſſe portioni 6 D altero ſpatio comprehenſam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipſa ſpatia eſſe æqualia.

Corollarium ſecundum.

NEC diſſimili argumento probabitur ſpatium ARHCA, quod a dimidia trochoide ARH, rectâ HC, & rectâ CA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHIFA, quod a dimidiâ comite AVH, ſemicircumferentiâ HIF, & dimidiâ baſi FA comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum ſpatiorum ſit ultra rectam AC extra rectangulum FC; & portio quædam ſecundi ſpatii contineatur intra ſemicirculum FIH; nihilo enim minus fiet demonſtratio univerſalis, ſed propter diſtinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propoſitionis multò facilius ex præcedentibus elicitur in rotâ ſimplici & prolatâ. Nam quia quarta Propoſitione oſtenſum eſt ſpatium AVHCA æquale eſſe ſpatio AVHFA; item Propoſitione ſexta ſpatium ARHVA oſtenſum eſt æquale ſemicirculo FIH: demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ ſimplici & contractâ, patebit Propoſitio.

Corollarium tertium.

In rotâ ſimplici quatuor hæc ſpatia ſunt æqualia ARHCA, ARHVA, AVHIFA & ſemicirculus FIH. Quia enim ſpatium comitis AVH 10 LA in rotâ ſimplici oſtenſum eſt eſſe duplum rotæ ſeu circuli FH, per Propoſitionem quartam erit dimidium ejuſdem ſpatii, ſcilicet AVHFA, duplum ſemicirculi FIH; quare dempto ſemel ipſo ſemicirculo, relinquitur ſpatium AVHIFA æquale eidem ſemicirculo. Cætera manifeſta ſunt.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Cujuſvis trochoidis ſpatium majus eſt circulo ſibi proprio, & exceſſus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Manifesta eſt Propoſitio. Nam in eâdem figura, ſpatium trochoidis ARH 25 LA æquale eſt ſpatio ſuæ comitis AVH 10 LA, ac præterea duobus ſpatiis ARHVA, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale eſt ſemicirculo FIH per ſextam Propoſitionem; ideoque ambo ſimul ipſi integro circulo FIHG ſunt æqualia; ideoque ipſum trochoidis ſpatium ſuperat circulum ſibi proprium ſpatio ſuæ comitis; quod quidem per Propoſitionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Corollarium.

Hinc palam eſt in rotâ ſimplici ſpatium trochoidis triplum eſſe ejuſdem rotæ: quia ipſum continet circulum ſibi proprium, hoc eſt ipſam rotam ſemel, ac præterea ejus duplum, ſcilicet ſpatium ſuæ comitis.

AD

AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA,

PROPOSITIO LEMMATICA PRIMA.

Esto circulus ACBD, cujus diameter AB; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicunque FG, sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G, &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametrum AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX, &c. quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundùm arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum, Tab. XXIV. Fig. 6.

Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX, portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG.

PRODUCANTUR enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurant in punctis H, O, P, D, Q, I, &c. & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ, &c. occurrentes diametro AB in punctis Y, Z, 2, 3, 4, &c. & ductis omnium arcuum subtensis FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ, &c. fiant triangula rectangula similia HRY, LSY, OZS, MTZ, PT 2, CE 2, &c. ac tandem sumpto arcu A ς, qui æqualis sit uni ex arcubus æqualibus, putà arcui FL; jungantur rectæ A ς, & B ς, ut fiat triangulum rectangulum A ς B prædictis HRY, &c. simile. Itaque propter triangulorum similitudinem, facile est colligere omnes subtensas intermedias LO, MP, CD, NQ, &c. simul sumptas, unà cum dimidiis extremarum, putà unà cum HR, & GX ad rectam B ς eundem rationem habere, quam recta RX ad rectam A ς. Atqui

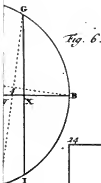
qui ex doctrinâ indivisibilium, & propter infinitam arcuum æqualium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ subtensæ simul sumptæ unà cum HR & GX, sumi possunt pro duplo omnium sinuum prædictorum indefinitè sumptorum, dempto eorum uno; sicuti recta B ſ pro diametro seu duplo radii, & recta A ſ, pro arcu A ſ, sive FL. Ut ergo duplum omnium sinuum indefinitè sumptorum dempto uno, ad duplum radii; ita recta RX ad arcum FL; sumptisque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes sinus indefinitè sumpti, dempto uno, ad radium, ut RX ad FL. Verùm tot sunt sinus, dempto uno, quot arcus; ergo sumptis consequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportione, erunt omnes sinus, dempto uno, ad radium toties sumptum, ut recta RX, ad omnes arcus minores; hoc est ad arcum FG. Sed in doctrina indivisibilium, unicus sinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propositio: quippe omnes sinus ad radium toties sumptum eandem rationem habebunt, quam recta RX ad arcum FG.

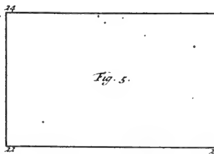
Corollarium primum.

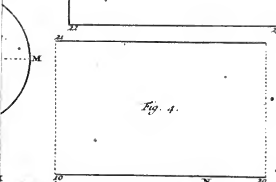
Si ergo arcus assumptus FG, sit semicircumferentia ipsa, ad quam pertineat diameter AB, quæ hoc casu referet rectam RX; patet omnes sinus rectos ad semicircumferentiam pertinentes atque secundùm æquales arcus indefinitè sumptos, esse ad radium toties sumptum, ut diameter ad semicircumferentiam. Hîc autem in demonstratione, quia extremi sinus evanescunt, nihil demendum erit nec addendum: in universum tamen additio aut substractio finiti alicujus determinati, in doctrinâ indivisibilium, nihil mutat.

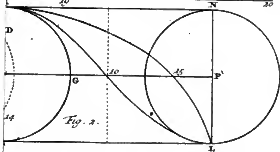
Corollarium secundum.

Si autem arcus FG sit quadrans diametro AB conterminus; tunc radius referet rectam RX; atque ita omnes sinus recti ad quadran-









rval.

drantem pertinentes, & secundùm æquales arcus sumpti, erunt ad radium toties sumptum, ut radius ad quadrantem.

Corollarium tertium.

At si arcus FG sit quidem diametro AB conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta RX erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

Corollarium quartum.

Si arcus FG diametro AB non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum FR vel GX erit radius; tunc recta RX æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs, ad ipsum arcum.

Corollarium quintum.

In casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta RX componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs FG. Ut ergo se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs FG pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

Corollarium sextum.

In eodem casu, si centrum cadat ultra puncta R, X; tunc recta RX erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum differentia erit arcus ipse FG. Itaque,

ut summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita differentia illa sinuum ad ipsum arcum FG.

Corollarium septimum.

QUONIAM autem omnes sinus recti differunt a radio toties sumpto, per omnes sinus versos; sumptis differentiis pro anteecedentibus, erunt omnes sinus versi ad radium toties sumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipsum arcum FG. Unde rursus sex Corollaria, sex præmissis respondentia facile deducentur, quorum quæ ad quartum pertinebit conclusio talis erit, Ut omnes sinus versi ad radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum & ipsum arcum, ad ipsum eundem arcum.

PROPOSITIO LEMMATICA SECUNDA.

Ex prædictis facile est examinandis sinuum Tabulis perutilem hanc Propositionem demonstrare.

Si in circumferentiâ circuli sumantur duo quicunque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propositione, omnes sinus recti ex arcu FM demissi, atque indefinitè sumpti, putà FR, LS, MT &c, ad omnes sinus rectos ex arcu CG demissos atque indefinitè sumptos, putà CE, NV, GX &c. (modò tamen singuli ex minoribus arcubus FL, LM, &c, æquales sint singulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c; sive multitudo horum æqualis sit multitudini illorum, sive non) erunt, ut recta RT extremis finibus intercepta, ad rectam EX extremis finibus interceptam.

NAM ex prima Propositione, Ut omnes sinus FR, LS, MT, &c, ad radium toties sumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties sumptus ad eundem radium toties sumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum CG: & ut radius

dius toties sumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem sinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX: ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes sinus FR, LS, MT, & ad omnes sinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX.

Corollarium primum.

Hinc licet Tabulas sinuum per quoscunque arcus commensurabiles examinare hâc ratione. Esto arcus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; sintque in utroque arcu dati extremi sinus ex Tabulis, putà FR, MT, CE, GX; tum reliqui intermedii per singula minuta prima, vel etiam secunda, si libuerit: unde ex iisdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergo numerus sinuum utrinque finitus est atque determinatus, ex summâ omnium priorum sinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex summâ posteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc residuum priorum ad residuum posteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod nisi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec excessus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium sinuum in utroque arcu contentorum.

Corollarium secundum.

Quod si proponatur arcus FG, ita dividendus in duos arcus FM, MG, ut demissis sinubus rectis FR, LS, &c. quemadmodum supra, summa omnium sinuum indefinitè sumptorum qui ad arcum FM pertinebunt, ad summam omnium qui ad arcum MG pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta RX in ratione datâ, putà in puncto T, atque ab eo excitanda perpendicularis TM usque ad circumferentiam; & factum

 erit,

erit, ut patet ex præmissâ secunda Propositione.

Hîc multa theoremata & problemata præmissis similia proponi possent, quæ, quia facilia sunt, nihilque ad nostrum institutum conducunt, consultò omittimus.

Ad primum, sequens notandum.

Tab. XXV. Fig. 1. In figurâ rotæ atque trochoidis ut pateat trilineum AMHG æquale esse quadrato semidiametri rotæ AG, adverte rectam GH quadranti circumferentiæ æqualem esse, quæ recta GH si in quotcunque partes æquales indefinitè secetur, & a singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam AMH, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundùm æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radium AG toties sumptum, ut radius AG ad quadrantem GH. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum AMHG ad rectangulum AH, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius AG ad quadrantem GH, ita quadratum ipsius AG ad rectangulum AH; ideoque ut trilineum AMHG ad rectangulum AH, ita quadratum AG ad idem rectangulum AH; unde trilineum ipsum AMHG æquale est quadrato semidiametri AG.

Quoniam autem trilineum reliquum AMHV est differentia inter trilineum AMHG & rectangulum AH; illud ergo AMHV æquale erit differentiæ inter quadratum AG & rectangulum AH; hoc est rectangulo contento sub semidiametro AG & differentiâ inter ipsam AG & quadrantem GH.

Ad

Ad secundum, sequens notandum.

BILINEUM AMHZA est manifestò differentia inter triangulum AGHZA sive quadrantem rotæ, & trilineum AMHG sive quadratum semidiametri.

De Rotâ simplici quædam notanda.

I. QUOD sub semidiametro rotæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, a sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio major æqualis sit quadrato semidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis sit rectangulo contento sub semidiametro rotæ & differentiâ quæ est inter eandem semidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipsius rotæ.

II. Quod a quartâ parte sociæ trochoidis & a rectâ quæ quartæ ipsius extrema conjungit clauditur spatium bilineum, æquale est differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum semidiametri ejusdem.

III. Propositâ trochoide ejusque sociâ, atque utriusque plano circa communem basim circumvoluto, fit solidum trochoidis circa basim, quod quidem ad cylindrum cui inscribitur hâc ratione comparabitur.

Portio solidi comprehensa inter duas superficies, quarum altera a trochoide, altera ab ejus sociâ describitur, æqualis est cylindro cujus basis sit rota ipsa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipsius rotæ; quoniam idem æquale est annulo stricto ejusdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumscripti quarta pars est.

Portio solidi quæ unica superficie continetur, scilicet eâ quæ a sociâ trochoidis describitur, commodè conferri potest cum cylindro cujus axis sit idem cum axe solidi trochoidis; semidiameter

verò basis sit semidiameter rotæ: reperietur autem talis portio æquari tali cylindro, ac prætere a quadruplo illi solido quod fit ex conversione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrato semidiametri rotæ, si scilicet tale trilineum circa iter centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumscripti quarta pars est; solidum autem ex conversione trilinei, ejusdem totius trigesima secunda pars evadit; quia omnia quadrata ipsius trilinei æqualia sunt omnibus quadratis omnium sinuum rectorum quadrantis rotæ secundum æquales arcus sumptorum, quæ omnia quadrata quadrati semidiametri toties sumpti dimidia sunt; & hoc quadratum semidiametri toties sumptum est decima sexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumscripti circa trochoidem: hoc ergo solidum quater sumptum octavam totius cylindri circumscripti partem constituit: tandem ergo sequitur totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituere ⅝.

Vel aliter hoc idem solidum quod a trochoidis sociâ circa ejusdem basim circumvolutâ describitur, ad totum cylindrum sic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus conversione circa basim trochoidis fit tale solidum, ad rectangulum ipsi circumscriptum, ex cujus conversione fit totus cylindrus se habet ut summa omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, ad diametrum toties sumptum; erit solidum ad cylindrum, ut summa omnium quadratorum ab omnibus sinibus versis secundùm æquales arcus sumptis, ad quadratum diametri toties sumptum. At hæc ratio est ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc est annulo stricto de quo supra; fit ut totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituat, ut priùs.

Et quidem ejusmodi ratio ⅝ de quâ jam egimus, geometricè vera est, ac prorsus accurata. At circa solidum quod fit ex conversione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec potest, nisi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam. Ne-

Neque etiam movemur quod Evangelista Torricellius asserat tale solidum ad suum cylindrum (qui scilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum basis basim ejusdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio $\frac{1}{45}$ minor est quam vera.

Ad hoc autem admittatur rursus socia trochoidis, cujus beneficio solidum trochoidis dividetur in alia duo solida. Primum duabus superficiebus curvis continebitur, eâ scilicet quæ a trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur. Secundum vero, circulo basis & eâ superficie curva terminabitur, quæ a sociâ trochoidis describetur. Ratione autem initâ secundùm Geometriæ regulas, primum solidum continebit quartam partem totius cylindri, ac præterea sphæram rotæ, quæ ad ipsum cylindrum se habet ut sexta pars quadrati diametri ad quadratum semicircumferentiæ: secundum autem solidum continebit ejusdem totius cylindri partem quartam, ac præterea portionem quandam quæ juncta sphæræ rotæ ad totum cylindrum se habebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiæ.

Ponatur radius partium æqualium	3000000	
Erit semicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum semicircumferentiæ	8882643960	paulo minus.
$\frac{1}{4}$ ejusdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati semicircumf.	4082643960	
$\frac{1}{4}$ hujus differentiæ	1020660990 }	
Semiquadratum semicircumferentiæ	4441321980 }	
Summa duorum ultimorum numerorum	5461982970	

Erit numerator rationis solidi ad totum cylindrum, cujus denominator quadratum semicircumferentiæ.

Ratio Torricellii quadrati semicircumferentiæ	5428282420	$\frac{11}{18}$ seu $\frac{44}{72}$
ejusdem quadrati	5551652475	$\frac{5}{8}$ seu $\frac{45}{72}$

Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ a Torricellio assignatur;

tur; minorem tamen eâ quæ suprà assignata est pro solido circa basim; quæ est $\frac{5}{8}$.

TAB. XXV. Fig. 1. AK 3 E 4 TPFB est trochoides: AMHQFB est ejusdem trochoidis socia: G 3 OHXIY est iter centri: C 7 I 8 F est axis: ANV 6 CB est basis: F vertex: DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSF, & BF: item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE, VH 4, & PQRX 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 13 KLM 7, & 14 TQS 8 parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V 4, 6 P, CF, &c. in infinitum ad totidem quadrata CF. Verum quadratum NE æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo NME; sicuti quadratum V 4 æquale est quadratis VH, H 4, & duplo rectangulo VH 4; & quadratum 6 P æquale est quadratis 6 Q, QP, & duplo rectangulo 6 QP, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata NM, VH, 6 Q, CF & similia, sunt quadrata omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt $\frac{3}{8}$ quadratorum diametri CF, & eadem constituunt rationem solidi sociæ trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est $\frac{3}{8}$. Reliqua quadrata ME, H 4, QP, &c. unâ cum duplis rectangulis NME, VH 4, 6 QP, &c. ad quadrata CF collata efficiùnt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ AMHQFP 4 EA circa basim AB circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim AB circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis AB, qui cylindrus constituit $\frac{1}{4}$ totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem $\frac{5}{8}$.

Aliter pro solido quod fit a trochoidis sociâ. Omnia quadrata NM, ab A usque ad VH æqualia sunt omnibus quadratis NO, OM, minùs omnibus duplis rectangulis NOM. Item ab VH usque ad CF omnia quadrata 6 Q æqualia sunt omnibus quadratis

6 X,

6 X, X Q, plus omnibus duplis rectangulis 6 X Q: verum hæc dupla rectangula 6 X Q æqualia sunt illis N O M, omnia scilicet omnibus; existentibus ergo contrariis signis plùs & minùs, elidunt se invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata N M, 6 Q, æqualia omnibus N O, O M, 6 X, X Q; horum autem N O, 6 X, sunt quadrata semidiametri, quæ constituunt quartam partem quadratorum totius diametri C F, sive $\frac{2}{8}$. At quadrata O M, X Q, sunt quadrata omnium sinuum rectorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ ideo constituunt dimidiam partem omnium quadratorum semidiametri, sive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata N M, 6 Q, constituere $\frac{2}{8}$ & $\frac{1}{8}$, hoc est $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum totius diametri C F, quæ eadem est ratio solidi quod fit a sociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumscriptum; putà ratio omnium quadratorum N M, 6 Q ad omnia quadrata C F.

Pro solido autem circa axem C F, admissâ rursus sociâ trochoidis in eâdem figurâ, manifestum est illud dividi in alia duo solida, quorum alterum instar annuli stricti terminatur duabus superficiebus, eâ nempe quæ a trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur: alterum autem solidum duabus etiam superficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ a sociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus semidiameter est recta C A.

Ac primum quidem solidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia simul quadrata M K, H 3, Q T, & similia, unà cum omnibus duplis rectangulis 7 M K, I H 3, 8 Q T, & similibus, ad quadratum A C toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub 7 13 sive C A & M K; sub I G sive C A & H 3; sub 8 14 sive C A & Q T; (propterea quod omnes rectæ 7 M, I H, 8 Q, &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis 7 13, I G, 8 14, &c. semel sumptis, hoc est rectæ C A toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati C A toties sumpti, sicuti omnes rectæ M K, H 3, Q T constituunt $\frac{1}{4}$ rectæ C A toties sumptæ.

Omnia autem quadrata MK, H 3, QT, &c. ad quadratum CA toties sumptum eandem rationem habent quam sphæra rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri rotæ ad quadratum CA, sive quam $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI seu AMHG quadrato IF seu IC æqualis, ad quadratum CA. Patet itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac præterea portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato AC toties sumpto conferantur, res expedietur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est ACFD, ductâ primò utcunque lineâ qualis est socia AMHQF constituente duo trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD: tum ductâ secundò rectâ VH 4 15, quæ & latera AC, DF, & parallelogrammum simul bifariam dividat, secetque lineam ipsam AMHQF utcunque in H, ita ut constituantur duo trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15, & duo reliqua quadrilinea; si insuper intelligamus rectam AC dividi tertiò in quotcunque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indivisibilium, & per puncta divisionis ductas esse rectas ipsi CF parallelas, quæ parallelogrammum dividant in totidem partes æquales, sed & lineam AMHQF in totidem punctis: constituent ergo ipsæ rectæ intra trilinea secundæ divisionis AMHV, HQF 15, multa alia minora trilinea tertiæ divisionis; tot scilicet intra singula quot partes æquales in singulis rectis AV, F 15, con-

continentur. Puta si rectâ AV tertiâ divisione in 1000 partes æquales dividatur, constituentur 1000 trilinea tertiæ divisionis quorum maximum erit ipsum AMHV; & omnia communem habebunt apicem A; ac minimum quidem trilineum assumet ex rectâ AV primam partem ad A terminatam; sequens autem assumet duas priores partes ad idem A terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & sic eodem ordine usque ad maximum; eritque forsan unum ex intermediis AMN. Sic intra trilineum HQF 15 totidem constituentur minora trilinea tertiæ divisionis quorum unum ex intermediis erit forsan F 18 Q. Præterea ex rectis CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quædam portiones intra prædicta trilinea secundæ divisionis continentur: putà intra AMHV, portiones AV, M 17; &c. intra HQF 15 verò, portiones F 15, Q 16, &c. atque ex doctrinâ indivisibilium demonstratur horum omnium portionum quadrata simul sumpta dupla esse omnium prædictorum trilineorum tertiæ divisionis simul sumptorum.

Hoc posito, illud inquam jam confectum est ex doctrinâ indivisibilium, diviso triplici divisione quovis parallelogrammo CD, ut dictum est, sive prima divisio fiat in partes æquales, ut hic, sive non; omnia quadrata CA, 7M, IH, 8Q, DF, 14Q, GH, 13M, &c. quæ ad trilinea AHFC, & FHAD primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem AMHV, HQF 15 comprehenduntur, ut suprà. Omnia enim quadrata omnium portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis AMHV, HQF 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium de-

monſtramus in ſecunda Propoſitione Appendicis quæ poſtea ſequetur. Et hoc quidem in univerſum in omni parallelogrammo: at hîc in ſpecie trilinea quidem AHFC, & FHAD primæ diviſionis æqualia ſunt; ſicuti æqualia ſunt quoque AMHV, & HQF 15 ſecundæ diviſionis: quare ſumptis tantùm AHFC, & AMHV quæ conſtituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7M, IH, 8Q, &c. quæ pertinent ad ſecundum ſolidum de quo agitur, conſtituunt quartam partem quadrati CA toties ſumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in trilineo AMHV comprehenſorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo ſolido inventa eſt, conjungatur, habebimus ſolidum rotæ conſtituere dimidium ſui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum ſic ſe habet ut $\frac{1}{2}$ trilinei AMHG ad quadratum AC, ut ſuprà: altera autem ad eundem cylindrum ſic ſe habet ut quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in AMHV comprehenſorum, ad idem quadratum AC toties ſumptum quot ſunt rectæ CA, 7M, IH, 8Q, &c.

Supereſt ergo ut oſtendamus duas illas portiones ſimul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{1}{2}$ quadrati radii, ad quadratum ſemicircumferentiæ: & quidem de $\frac{1}{2}$ trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, ſic patebit.

Producatur recta DGA versùs A uſque in 9, ita ut recta G9, ſit æqualis rectæ GH, hoc eſt quadranti circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH conſtituet ad punctum H angulum minorem omni angulo rectilineo, etiamſi producta ſecet candem curvam AMHQF in ipſo puncto H, in quo, tali ſectione, conſtituentur duo anguli ad verticem oppoſiti æquales, ac ſinguli minores quovis angulo rectilineo; quod tamen hic parum refert: ſufficit enim quod recta 9H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem ſic oſtendimus.

In

In ipsâ 9 H sumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipsi AG atque occurrens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipsa 12 10 producta, si opus sit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis est rectæ 10 H, recta autem 10 H æqualis est arcui cuidam quadrante minori, cujus sinus rectus erit recta 10 11 ex naturâ sociæ trochoidis; quare 10 11 minor est quàm 10 H sive quàm 10 12: unde punctum 12 est extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9 H ostendetur. Quoniam autem trilineum HQF 15 secundæ divisionis, & omnia minora trilinea tertiæ divisionis in eo contenta, trilineo AMHV secundæ divisionis, & omnibus trilineis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt: quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF 18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F 15, rectam F 18 quotcunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD; tum rectæ F 18 sumatur æqualis ex HG recta H 10, ducaturque recta 10 11 12, ut suprà. Est igitur F 18, sive H 10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18 Q; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum: & trilineum quidem QF 18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F 18 contentorum, ad radium IF totius sumptum, quot in arcu F 18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F 18 & sui sinus recti, ad arcum F 18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ: quia recta F 18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F 18, sive 10 12, est 11 12; atque insuper alter sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, putà sinus FI cadit in centrum: quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum FX, ut recta 11 12 ad rectam F 18;

sed parallelogrammum FX ad parallelogrammum FH se habet ut recta F 18 ad rectam F 15: quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive GH.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallelogrammum FH toties sumptum sic se habere, ut omnes differentiæ inter omnes sinus rectos secundum æquales arcus sumptos, & suos arcus, ad quadrantem G 9 toties sumptum. Ut autem hæ omnes differentiæ ad omnes quadrantes, ita trilineum AMH 9, quod differentias illas omnes continet: ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinâ indivisibilium: quare argumentis ex arte institutis quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo HQF 15, sive in trilineo AMHV contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi FH toties sumpti quot sunt trilinea in AMHV, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G9, sive ut duplum trilinei ipsius AMH 9 ad quadratum semicircumferentiæ AC. At octuplum prædictum æquale est omnibus quadratis CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ex doctrina indivisibilium; quia tam ex octuplo illo, quam ex omnibus his quadratis, constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam AC: sive, quod idem est, quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV contentorum, ad omnia quadrata CA, 7 13, IG, 8 14, &c. sic se habet, ut duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata semicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis solidi rotæ, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC; sed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut $\frac{3}{4}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 ad quadratum AC; sed $\frac{3}{4}$ trilinei

AMHG

AMHG unà cum duplo trilinei AMH9 simul differunt a quadrato quadrantis G9 tanto spatio quantum est ⅔ ipsius trilinei AMHG; (patet, ex eo quod triangulum HG9 sit dimidium ipsius quadrati G9.) constat ergo propositum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum sic se habere, ut differentia inter quadratum quadrantis & ⅔ trilinei AMHG, quod quadrato radii æquale est, ad quadratum semicircumferentiæ.

Nota.

Ex iis quæ exposita sunt de rotâ simplici, atque solidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in simplici valebit methodus, eademque vigebunt argumenta, sed conclusiones erunt diversæ propter diversas rationes altitudinis cujuscumque trochoidis ad suam basim. Nos tamen iis præmissis nec absolutis, sed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, supersedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quam ejus sociæ, examini subjicientur, ac detegentur.

APPENDIX

Ad solidum trochoidis circa axem conversæ, continens aliam demonstrationem secundi solidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod a sociâ circa axem conversa describitur.

Ad hoc autem præmissis duabus Propositionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ sequuntur.

Corollario quidem septimo præcedenti demonstratum est in arcubus quadrante non majoribus, sic esse omnes sinus versos ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum & ipsius arcum

arcum ad ipsum eundem arcum. Hîc verò demonstrabimus idem quoque verum esse de arcubus quadrante majoribus.

PROPOSITIO PRIMA.

TAB. XXV. Fig. 2. *Esto circulus cujus centrum A, diametri BC, DE ad rectos angulos sese secantes, ita ut BEC sit semicircumferentia divisa in duos quadrantes BE, CE, qui in quotlibet arcus æquales indefinitè dividantur in punctis B, F, G, H, I, L, E, M, N, O, P, Q, C, &c. atque sumatur arcus quivis IEC quadrante major, & a punctis divisionis illius demittantur in diametrum BC perpendiculares IR, LS, EA, MT, NV, OX, PY, QZ, &c. ut habeantur omnes sinus versi CZ, CY, CX, CV, CT, CA, CS, CR, &c. ad arcum IC pertinentes: sinus autem rectus arcûs IEC erit IR. Dico ergo sic esse omnes illos sinus versos ad radium AB toties sumptum, ut differentia inter sinum RI & suum arcum IEC ad ipsum eundem arcum.*

DEMITTANTUR in diametrum DE sinus recti F3, G4, H5, I6, &c. qui pertinent ad divisiones arcûs BI quadrante minoris ac semicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes sinus recti BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties sumptum, ita sinus IR ad arcum IB. Ut autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IB, ad ipsum radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita arcus IB ad ipsum arcum IC: ergo ex æquo in tribus terminis, ut summa sinuum BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita sinus IR ad arcum IC; & sumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter summam sinuum rectorum BA, F3, G4, H5, I6, &c. & radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ad ipsum radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum IR & suum arcum majorem IC, ad ipsum eundem arcum. Verùm differentia illa summæ sinuum

sinuum & summæ radiorum æqualis est summæ sinuum versorum prædictorum, ut statim demonstrabimus: itaque constat Propositio.

Lemma.

Quod autem assumptum est, hoc ita demonstratur. Ex quadrante EC sumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE sinus recti Q3, P4, O5, N6, &c. qui æquales erunt ipsis F3, G4, H5, I6, &c. illis autem ex radio AC toties demptis, remanent manifestò sinus versi CZ, CY, CX, CV: superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IN; sed hic perficit sinus versos reliquos CT, CA, CS, CR: nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos CV, CR; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos CT, CS; sinus autem versus CA est idem radius. Reliqua patent. Nec aliquem moveat quod idem sinus versus CV bis assumptus est: ille enim cùm sit magnitudo quædam determinata, semel tantum, plusquam par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilium.

Corollarium.

Quoniam ergo in omni arcu, omnes sinus versi sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiam. Patet ex æquo in tribus terminis omnes sinus versos arcûs propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcûs propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiam.

PROPOSITIO SECUNDA.

TAB. XXV. Fig. 3. *Esto trilineum quodcunque ABC, cujus duo ex lateribus putà AB, BC, sint lineæ rectæ, tertium verò AC utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum a puncto A ad punctum C, idem fiat continuò propius ac propius rectæ BC; remotius autem ac remotius a rectâ AB: ut sic nec recta AB, nec BC, nec quævis iisdem parallela, ipsi lineæ AC duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum ABCR; atque intelligatur converti tam parallelogrammum quam trilineum circa unum latus, putà BC.*

MANIFESTUM est a parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindraceum cylindro æqualem; a trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum BC dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis H, G, I, &c. per quæ ducantur rectæ HO, GP, IQ, &c. ipsi AB parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectarum BA, HO, GP, IQ, &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum BA toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissime hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum AB dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis E, D, F, &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis BH, HG, &c. ducanturque totidem rectæ EL, DM, FN, &c. lateri BC parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum divident, constituentque intra illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A constituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec est quod quis dicat rectas AB, BC longitudine posse esse incommensurabiles; atque ita non posse partes unius æquales esse par-

partibus alterius: nam præterquam quod in divisione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifestum est, posse in utrâque partes omnes esse æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omnino definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indivisibilium.

Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC constituta, simul sumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. simul sumptorum dimidiam partem constituere. Intelligatur enim ipsa omnia quadrata erecta super plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indivisibilium illa constituent solidum quoddam quinque figuris comprehensum, quarum prima erit ipsum trilineum; secunda est trilineum cujus basis ipsi rectæ AB parallela est & opposita, & vertex punctum ipsum C; tertia autem erit quadratum super rectâ BA erectum; quarta super rectâ BC erecta, erit trilineum ipsi ABC simile & æquale; quinta tandem super lineâ AC erecta, erit utcunque plana vel curva, prout ipsa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam secans planum trilinei ABC secundùm rectam BC, atque ad idem inclinatum secundùm angulum semirectum versùs A; hoc ergo planum sic inclinatum dividet bifariam omnia & singula quadrata erecta ut suprà; unde & idem planum dividet quoque bifariam solidum ex illis quadratis constans, eruntque partes duo solida instar pyramidum, singula quatuor superficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile est, basim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ superficies illius sunt, triangulum super rectâ AB erectum & dimidium quadrati constituens; figura supra lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato secante constituitur: tale autem solidum manifesto constat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indivisibilium; estque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipsique perpendiculariter imminet.

 Osten-

Ostendamus ergo tale solidum constare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iisdem æqualibus; sic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum esse æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quàm ab illis quadratorum dimidiis idem solidum constituetur, ex doctrinâ indivisibilium. Ad hoc autem altitudo talis solidi, putà recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum ABC erecta, ad solidi verticem pertinet, estque rectæ AB æqualis, eodem modo indefinitè dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia, æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinitè sumptis secundùm doctrinam indivisibilium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

PROPOSITIO TERTIA.

TAB. XXV. Fig. 1.

Jam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superiùs expositâ, intelligatur socia AMHQF22B circa axem CF conversa. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.

NAM sicuti socia illa secat bifariam rectam GI in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam IY; esto in puncto 22: unde recta H22 æqualis erit dimidio itineris centri GI, hoc est æqualis semicircumferentiæ rotæ. Super ipsâ H22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20 19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe CIF producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam qua-

quadrati H 20 esse rectam 9H productam, ipsamque cadere extra curvam sive sociam HQF, propter easdem rationes quibus probavimus suprà, rectam H9 cadere extra curvam HMA.

Jam utraque rectarum AC, CF in partes æquales indefinitè dividatur, & per puncta divisionis rectæ AC ducantur rectæ ipsi CF parallelæ, putà NM, VH, 6Q, &c. usque ad sociam AMHQF; per puncta autem divisionis rectæ CF ducantur rectæ parallelæ ipsi AC, putà 7M, IH, 8Q, &c. usque ad eandem sociam. Quo posito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata CA, 7M, IH, 8Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum ANM, AVH, A6Q, ACF, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum CA sumptum ut jam dictum est, putà secundùm numerum rectarum CA, 7M, IH, 8Q, &c. ex divisione diametri CF in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ AC: quia tam ex tali quadrato CA toties sumpto quot sunt partes in rectâ CF, quàm ex rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes in rectâ AC constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet rectangulum ipsum AF, altitudinem autem rectam AC; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ AC, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea

prædicta bis sumpta ad rectangulum A I toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum A I toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum HQF 22 est dimidium quadrati diametri CF, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum HQFI, sive ipsi æquale AMHG ostensum est suprà æquale esse quadrato semidiametri AG vel CI; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum HF 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habere ut trilineum HF 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, putà A 29 11, assumens ex rectâ AC portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio HX; ducaturque recta XQ 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & HX exhibebunt arcus æquales: & arcûs quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcûs autem HX sinus rectus erit XQ: cúmque recta X 30 æqualis sit arcui HX, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum XQ & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versi arcûs HX sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ AC, sive H 22, ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22 20: atqui omnes sinus versi arcûs A 29 constituunt trilineum A 29 11, & radius AG toties sumptus quot sunt divisiones in AC constituit rectangulum AI ex doctrinâ indivisibilium. Ut ergo trilineum A 29 11 ad rectangulum

gulum A I, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum A V H assumens ex rectâ A C quadrantem circumferentiæ A V; posito etiam quadrante H I cujus sinus rectus sit I F, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum A V H ad rectangulum A I, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pari ratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex A C rectam A 27 quadrante majorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi C F ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum A I, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum A I toties sumptum sic se habent ut omnes differentiæ sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam: omnes autem illæ differentiæ constituunt trilineum H F 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircumferentiæ, ex doctrinâ indivisibilium: unde patet Propositio.

Corollarium.

RECIDIT autem hæc ratio cum eâ quæ suprà exposita est: siquidem trilineum H F 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac prætérea duplum trilinei H Q F 21, hoc est duplum trilinei H M A 9: unde resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putâ quartâ totius parte, ac prætérea eâ portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{1}{4}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se habebit ut $\frac{1}{4}$ quadrati

drati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA 9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprà.

Ut ergo unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circa axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, putà 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac præterea $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri, hoc est $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI sive $\frac{2}{3}$ bilinei HQF 22: tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent $\frac{3}{4}$ quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.

PROPOSITIO QUARTA.

Quoniam suprà in demonstrando solido trochoidis circa basim conversæ hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{8}$ omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hic utrumque assumptum unicâ demonstratione ostendere.

TAB. XXV. Fig. 2. In figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, sive duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale est quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB sive duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri putà de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ

rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. ſunt quoque omnes ſinus verſi qui prædictis ſinguli ſingulis, ſed ordine converſo ſunt æquales; & horum quadrata ſingula ſingulis ſunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium ſinuum verſorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales ſemicircumferentiæ ſunt omnes ſinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium ſinuum rectorum. Omnia ergo quadrata diametri æqualia ſunt duplo omnium quadratorum ſinuum verſorum unà cum duplo omnium quadratorum ſinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale eſt quadrato ſinus recti QZ unà cum quadrato AZ, ſive unà cum quadrato ſinus complementi Q 3: ſimiliter quadratum radii AP æquale eſt quadrato ſinus recti PY unà cum quadrato ſinus complementi P 4, atque ita de reliquis: quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia eſſe omnibus quadratis ſinuum rectorum unà cum omnibus quadratis ſinuum complementorum. Verùm omnes ſinus recti omnibus ſinibus complementorum ſinguli ſingulis ſunt æquales, ſi minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia ſumuntur ſecundùm arcus æquales ex hypotheſi: quare omnia quadrata radii æqualia ſunt duplis quadratorum omnium ſinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla ſunt omnium quadratorum radii; ipſa ergo omnia quadrata diametri quadrupla ſunt dupli quadratorum omnium ſinuum rectorum: unde omnia quadrata ſinuum rectorum ſemel ſumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem conſtituunt.

Quoniam ergo duplum omnium quadratorum ſinuum rectorum conſtituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium ſinuum verſorum conſtituat ſex octavas partes, atque ut ipſa quadrata omnium ſinuum verſorum ſemel ſumpta tres octavas partes conſtituant ipſorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

PROPOSITIO QUINTA.

Tab. XXV. Fig. 1.

Sed & illud demonstrare lubet, quod pro solido sociæ trochoidis circa axem conversæ, priori modo demonstrando, assumptum est tanquam quid confectum ex doctrinâ indivisibilium. Omnia quadrata CA, 7M, IH, 8Q, DF, 14Q, GH, 13M, &c. quæ ad trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15.

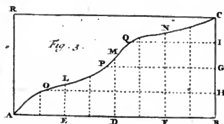
Illud autem statim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallelæ sunt, quæ secet trilinea primæ divisionis, ita ut ejus rectæ portio 7 M in uno trilineo, altera autem portio 13 M in altero contineatur; secet autem ipsa 7 13 lineam primæ divisionis AMHF in puncto M, & rectam secundæ divisionis V 15 in puncto 17: manifestum est, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora esse dimidio quadrati totius 7 13, quantum est duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trilineum secundæ divisionis AMHV pertinet: quod cùm de omnibus aliis rectis verum sit, patet Propositio.

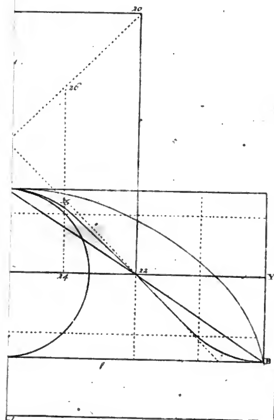
DE LONGITUDINE TROCHOIDIS,

PROPOSITIO.

Cujuscunque assignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.

Quid sit trochoides, quid rota ex qua illa nascitur, quæ sint tres illius præcipuæ species, & quomodo inter se distinguantur, hîc notum esse supponimus. Ute-


Fig. 3.
R
C
N
Q
I
M
P
G
L
O
H
A
E
D
F
B


20
26
Y
B

Utemur argumento ex motuum compositione desumpto, quo ex æquali moti puncti velocitate æquales describi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus necesse est, atque e converso.

Etsi verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, simul circa centrum suum convertatur, tamen hic intelligemus rotam ipsam trahi tantùm recto itinere, non autem converti; sed punctum trochoidem describens, ferri secundùm circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eódem quò suprà recidit, & Geometriæ aptius esse visum est.

F punctum contactus tam FG rectæ tangentis rotam, quàm FH tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium est AFD, initium A, recta AIB dimidium basis, BD axis, AEC diameter rotæ initio motûs, CHD linea verticis. TAB. XXVI. Fig. 1.

IXHN rota est, cujus centrum L a principio motûs jam percurrit rectam EL æqualem rectæ AI, existente diametro rotæ in hac positione rectâ ILH; unde ipsa recta EL vel AI arcui IF æqualis est.

GF, GH rotam tangentes æquales sunt; unde ductâ chordâ rotæ FR ipsi AI parallelâ, & sectâ bifariam in S a diametro ILH; ductâ etiam HV ipsi FG tangenti parallela, ac secante ipsam FR productam, si opus erit, in V; erit parallelogrammum FGHV rhombus, cujus anguli GFV, GHV bifariam secabuntur a diagonali FH tangente trochoidem.

M punctum est in quo arcus rotæ FMI bifariam secatur, & a quo ducitur chorda rotæ MQP ipsi AI parallela, secans diametrum IH in Q; sed & ductâ chordâ MR secante eandem IH in T, erunt rectæ QI, QT æquales, propter æqualitatem triangulorum IQM, TQM.

Reliquum constructionis ei qui trochoidem noverit, per se ex ipsa figurâ satis ostenditur: præ cæteris notetur chorda IM.

Ostendendum est portionem trochoidis AF ab initio A secundum longitudinem suam curvam mensuratam, æqualem esse quadruplo

 druplo

druplo sinus versi IQ, sive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF est portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, ostendetur ipsa curva AFD æqualis quadruplo semi-diametri IL, seu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujusce Propositionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifestum est tunc tria puncta I, A, F simul extitisse, & ambo E, L simul, & ambo C, H simul: exinde verò punctum I percurrisse rectam AI uniformi motu, sicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F secundum rotæ circumferentiam percurrisse arcum IMF; quo factum est ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF essent æquales: at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu composito descripsit portionem trochoidis AF, in quo ipsius F velocitas continuò mutata est augescendo sensim ab A in F. Examinemus ergo illam auctionem continuam per omnia puncta ejusdem AF; ac pro diversis positionibus puncti F, diversas ipsius velocitates in curvâ AF cum ejusdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ positione quæ primum oblata est, in qua F est quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diversum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF sic se habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV: idem verò de singulis punctis in curvâ AF assumptis dicetur, mutatâ convenienti positione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F, ergo & ipsius velocitas; & est velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF, sicuti & ipsius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipse idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi divisioni correspondeat infinita divisio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil interest) & singulis

gulis minoribus arcubus ipsius IMF assignentur suæ tangentes æquales, quibus etiam correspondeant totidem tangentes curvæ AF, quanquam minimè æquales, erunt per vigesimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF simul sumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF simul sumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF, ad omnes velocitates ejusdem puncti F in arcu IMF: atqui ut velocitates inter se, ita sunt lineæ ab ipsis percursæ, putà curva AF & arcus IMF. Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF, sic ipsa curva AF ad ipsum arcum IMF; quod primò notetur.

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH, & a contactu ducitur recta FSR ipsum circulum secans, erit per trigesimam secundam libri tertii Elem. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS; unde triangula isoscelia FGH, FLI similia sunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG, ita chorda IF ad radium FL; & divisis infinitè, ut suprà, arcu IMF & curva AF, adjunctisque iisdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur a puncto I totidem chordæ ad singula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes simul sumptas ad radium FL toties sumptum sic se habere, ut omnes tangentes curvæ AF simul ad omnes tangentes arcus IMF simul; hoc est per primum notatum, ut curva ipsa AF ad arcum ipsum IMF: quod secundò notetur.

Jam arcus IM qui ipsius IMF dimidius est, dividatur æqualiter infinitè; sed ita ut in ipso IM tot sint divisiones quot in toto IMF, hoc est quot sunt chordæ in ipso arcu IMF, sive quoties sumptus est radius FL; tum a singulis arcûs IM punctis in radium IS demittantur totidem sinus recti, quorum maximus est MQ: tot ergo sunt sinus recti ab arcu IM, quot chordæ in arcu IMF, & unusquisque sinus uniuscujusque chordæ correlatæ dimidium est; unde ipsorum omnium sinuum summa dupla æqualis est summæ chordarum semel sumptæ. Erat autem ex secundo

notato summa chordarum ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF; ergo sinuum dictorum summa dupla se habet ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF. At ut summa illa dupla sinuum ad summam illam radiorum, sic se habet duplum sinus versi IQ ad arcum IM, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum IQ ad arcum IM, ita quadruplum IQ ad duplum arcus IM, hoc est ad arcum IMF. Ut ergo hoc quadruplum sinûs versi IQ ad arcum IMF, ita curva AF ad eundem arcum IMF; quare hæc curva AF æqualis est quadruplo sinûs versi IQ: quod erat propositum.

Corollarium.

COROLLARIUM manifestum est. Si enim pro trochoidis portione AF, ut suprà, assumamus ipsam dimidiam trochoidem integram AFD, tunc rotæ diameter quæ erat IH, cum axe BOD congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis seu centris L, O, & punctum T punctis seu verticibus H, D, &c. Unde arcus IMF fiet semicircumferentia rotæ IXH, & arcus IM fiet quadrans IX, & sinus versus IQ fiet radius IL, &c.

Itaque per Propositionem, semi-trochoides AFD sinus versi IL erit quadrupla, seu diametri IH dupla, quod est Corollarium.

Hæc & multa alia, cùm circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexissem, & ferè omnia publicè multoties patefecissem, tam in Cathedra Regia, quam in multorum doctorum conventibus; immo & quibuslibet amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propositionem semper reticui: sperabam enim eâdem methodo (quam primus, ut puto, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadratu-

draturas. Nec me ſpes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebam, de quibus viderint poſteri quibus hæc noſtra ſpeculatio non erit forſan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compoſitione adeo univerſalem eſſe, ut nec analyſi ſolâ coërceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipſis comprehenditur: hinc latiſſimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque pluſquam ſolidus.

Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum eſt ut quidam Extranei nationis noſtri æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apum favos invadunt, & quod elaborare non poſſunt mel, vi & injuriâ ſibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque ſibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Noſtratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cùm mihi nihil reliquum eſſe cuperent nec inventa mea ſibi arrogare auderent, ne ridiculi apud Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quanquam multis annis poſteriori, quàm mihi ſuo civi & vero inventori, mallent addicere; & ſic contra perſpectam ſibi veritatem, & verbis & ſcriptis impudenter mentiri.

His artibus, ipſa trochoides, ejuſque tangentes, & plana, ſed & ſolida ferme omnia mihi erepta ſunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, ſolus obex obſtitit, ſolidum circa axem, quod de induſtriâ cum Propoſitione præmiſſâ de longitudine reticueram. Suſtinui, & exſpectavi donec circa ipſum ſolidum fœdè errarent qui præ cæteris ſapere videri volebant, quorum ipſorum, ſuper hac re, literas autographas etiamnum aſſervo, eaſque non unicas: tunc verò ſolidum ipſum vulgavi anno 1645, noſtriſque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) reſponſum accepi mœroris atque indignationis plenum, ob errorem contra ſpem ſuam patefactum. Lætabar interim, & hæc illis ſubinde (arrogantiùs forſan) exprobrabam, Certè meæ quiſquiliæ alicujus ſunt pretii, in quas fures adeo cupide involent, eaſque ſibi retinere tantâ pertinaciâ contendant. Poſſum

Possum tamen cùm libuerit, mea a furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita a viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissa a quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præsagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicè, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius a nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitrochoidis AFD, (semicycloidem ille cum multis aliis vocat) putà portionem DF a vertice D incipientem, duplam esse tangentis HF. Hanc enuntiationem cum nostra coincidere, sic demonstramus.

Tab. XXVI. Fig. 1.

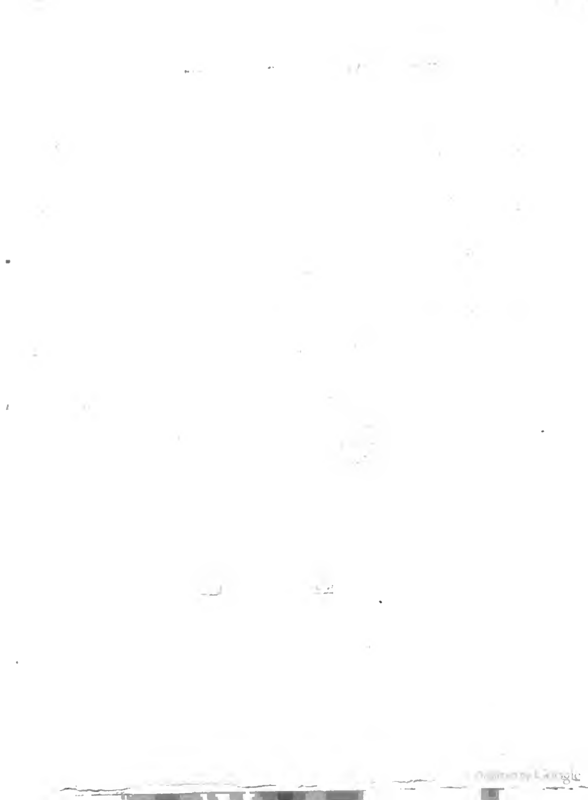
Quoniam quatuor arcus FM, MI, IP, PR æquales sunt, secabunt se invicem chordæ æquales FP, RM in eodem puncto T diametri IH; & rectæ IQ, QT sunt æquales; & anguli TFI, TFS æquales; sed & angulus HFR sive HFS, æqualis est angulo HIF, quia insistunt arcubus æqualibus HR, HF; ergo summa angulorum HFS, TFS, æqualis est summæ angulorum HIF, TFI; prior autem summa constituit angulum HFT, & posterior summa æqualis est angulo externo HTF in triangulo ITF; æquales sunt ergo anguli HFT, HTF; unde in triangulo HFT latera HF, HT sunt æqualia: sed HT cum IT constituunt diametrum; ergo & HF cum IT diametrum constituunt; & est IQ dimidia ipsius IT; quare HF cum dupla IQ constituunt diametrum; & sic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum constituunt. Sed & ex Corollario, semitrochoides AFD ejusdem diametri dupla est; itaque ipsa AFD duplo tangentis HF, & quadruplo sinûs versi IQ æqualis est: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc qui-

quidem quadruplo ſinûs verſi, illinc autem portione AF ſemitrochoidis, ſupereſt ut reliqua portio ſemitrochoidis FD duplo tangentis HF ſit æqualis.

Potuit demonſtratio directè inſtitui per motuum compoſitionem, initio ſumpto a vertice D, in curva DF portione quâcunque ſemitrochoidis; quo pacto, concluſio per ſe incidiſſet in duplum tangentis HF, ut mox dictum eſt. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipſi HF parallela, demittendi eſſent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinities æqualiter diviſi, totidem ſinus recti in ipſam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipſum arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipſis correſpondentes, pertinenteſque ad curvam DF; omnino ſicuti de arcu IMF, ac de curva AF ſuperiùs dictum eſt, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonſtratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideo mens ipſa conquievit, quod & Propoſitionibus, & ipſius trochoidis idem eſſet initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac ſociarum omnium, aliàs dicemus.





EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD

R. P. MERSENNUM.

EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD

R. P. MERSENNUM.

EVERENDE PATER,

Ex propoſitionibus Clariſſimi Torricellii eas tantum examinandas cenſui, quas nonniſi ab egregio Geometrâ profectas eſſe judicabam. Quapropter prætergreſſis octo primis circa ſphæram, & ſolida eidem inſcripta & circumſcripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter verſatum fugere non poſſe exiſtimavi, nonam aggreſſus ſum quæ eſt de dimenſione cochleæ, quam, ut ardua eſt, ita veram eſſe certiſſimâ demonſtratione perſpexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præſtantes hujus ſæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortaſſis mirere nihil refert; magiſne an minus inter ſe diſtent ſpiræ ipſius cochleæ, modò idem ſit ſemper triangulum a quo deſcribatur; ſed & etiamſi ipſum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progreſſivo, ita ut idem triangulum abſolutâ converſione in ſe ipſum redeat: eodem modo ſe res habebit, nec mutabitur Propoſitio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendo a priori, nullâ ſuppoſitâ ejus quadraturâ; ſi ipſe ſic proponit, ut ſe inveniſſe intelligat, laudamus: ſi vero a nobis quærit, dabitur illi non ſolum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordinatim applicatarum inter ſe ſunt, ut portiones diametri; ſed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica,

&c. atque in earum solidis; sive ipsæ parabolæ circa suos axes, sive circa tangentes ad extremitatem axis, sive circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, sive fusi parabolici dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Præterea rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsan minime spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec rectè percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emittatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsan & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ rotæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide sive prolata, sive contracta; atque in sociis earumdem.

Propositio de solido a qualibet sectione coni circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eidem inscriptum unica enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec ei inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantùm demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vereor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiamsi ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejus-

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphærico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.

Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hîc addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura cujus constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, assymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium proportionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius verò FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, media proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, media quoque proportionalis sit BN; atque inter BT & BH, esto B4. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B4, sit BY; inter B4 & BH, sit B7; atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducantur plana ad rectam AB erecta, solidum secantia secundum circulos quorum diametri 6 8, 3 5, XZ, SV, &c. parallelæ ipsi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales esse rectas FH, 6 7, 3 4, XY, ST, & reliquas in eadem ratione, sed inversa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inscribantur & circumscribantur ipsi solido totidem cylindri quot sunt differentiæ, H7, 7 4, 4Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti verò F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitu-

Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 113. Tab. XXVI. Fig. 2.

titudinis KA, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis SV, & altitudinis AH, est medius proportionalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis SV; sed altitudinum H7, 74, 4Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circumscripto F 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta ST media proportionalis est inter DA & FH, major erit ratio circuli medii SV ad circulum 6 8, quàm rectæ DA ad rectam 6 7: at idem circulus medius SV, ad circulum FG minorem habebit rationem quàm eadem recta DA ad eandem 6 7; ut autem DA ad 6 7, ita H 7 ad AK: ergo circulus medius SV, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim verò circumscripti FG, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H 7 ad altitudinem ultimi medii AK. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis NK, basis verò circuli medii SV majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem verò secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit.

Corollarium.

PATET autem manifestò positis rectis BH, B7, B4, BY, &c. continuè proportionalibus, & factâ constructione eâdem, dividi totum solidum hyperbolicum FG, ED in portiones continuè proportionales in eadem quidem, sed inversa ratione rectarum ipsarum BH, B7, B4, &c. quæ portiones erunt FG 86, 68 53, 35 ZX, &c. quia qui ipsis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione proposita, quæ proprietas eximia est.

Se-

Secundò intelligamus solidum hyperbolicum B A versus A infinitè productum esse, atque idem secari quovis plano 3 5 ad rectam B A erecto in puncto 4, ac circulum constituente cujus diameter 3 5; tum super hac base, circulo 3 5, esto cylindrus 3 5 24 23, cujus altitudo sit B 4: dico talem cylindrum æqualem esse solido hyperbolico super basi 3 5 constituto, atque infinitè versùs A extenso.

Aliàs, vel cylindrus major est solido, vel minor. Esto primùm major, si fieri potest, & excessus esto magnitudo 25, ita ut solidum hyperbolicum unà cum spatio 25 intelligatur æquale esse cylindro proposito 3 5 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B 4, semidiameter vero basis PQ, ita ut hic cylindrus minor sit spatio 25: sit autem P Q perpendicularis ad B A, atque interjecta inter hyperbolam, & assymptoton, hoc enim fieri potest. Tum fiat ut B 4 ad B Q, ita B Q ad B A, & terminetur solidum hyperbolicum circulo D A E. Erit ergo ex prædemonstratis solidum 3 5 E D æquale cylindro altitudinis A 4, basis verò semidiametri P Q. Addantur inæqualia; solido quidem, spatium 25; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B 4, & ejusdem basis semidiametri P Q. Fient ergo inæqualia: illinc solidum hyperbolicum 3 5 E D, unà cum spatio 25, majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis A B basis semidiametri P Q, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito 3 5 24 23, quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ: ergo solidum hyperbolicum 3 5 E D, unà cum spatio 25, majus esset cylindro 3 5 24 23. Verùm solidum hyperbolicum infinitè extensum versùs A, unà cum eodem spatio 25, positum est æquale eidem cylindro 3 5 24 23: hoc ergo infinitè extensum minus esset sua portione 3 5 E D, quod est absurdum. Esto secundò cylindrus 5 23 minor solido hyperbolico infinitè extenso, si fieri potest; poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, putà 3 5 E D major eodem cylindro 5 23; ita ut planum D E, parallelum sit plano 3 5, constituatque circulum cujus centrum

A. Inveniatur recta BQ media proportionalis inter BA & B4; ſeceturque ſolidum hyperbolicum plano PQR parallelo ipſi 3 5. Jam ut ſuprà, ſolidum 3 5 ED æquale eſt cylindro baſis PQR, altitudinis verò A 4: cylindrus verò 5 23 æqualis eſt cylindro ejuſdem baſis PQR, altitudinis verò AB: ponitur autem ſolidum 3 5 ED majus cylindro 5 23; ergo cylindrus baſis PQR altitudinis A4, major eſſet cylindro ejuſdem baſis & altitudinis AB, quod eſt abſurdum.

Tandem propoſito quovis ſolido hyperbolico ex prædictis; putà DEGF: oporteat ipſum dividere in duas portiones quæ datam ſervent rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27: fiat ut recta FH ad rectam DA, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta AH altitudo ſolidi in puncto T, ita ut portiones HT, TA eandem habeant rationem quam magnitudo 28, ad magnitudinem 27: & per punctum T ducatur planum STV parallelum plano FG vel DE, quod quidem planum STV dividat ſolidum hyperbolicum in duas portiones FGVS, & SVED: dico has portiones eandem inter ſe rationem habere, quam magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter BT & BH media ſit proportionalis B4: item inter BT & BA media ſit proportionalis BN; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque ſolidum ſecantia ſecundùm circulos quorum diametri 3 4 5, MNO. Quoniam ergo continuè ſunt proportionales BH, B4, BT, erunt quoque proportionales in eadem ſed inverſa ratione rectæ FH, 3 4, ST propter hyperbolam: quare ex prædemonſtratis, cylindrus altitudinis HT, baſis verò diametri 3 5 æqualis eſt portioni ſolidi hyperbolici FGVS. Simili argumento cylindrus altitudinis TA, baſis autem diametri MO, æqualis eſt reliquæ portioni SVED: ſunt autem ipſi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonſtrabimus; quare & portiones ſolidi hyperbolici ſunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri ſint in ratione data magnitudinis 26 ad

ad magnitudinem 27, fic conftabit. Quoniam ex conftructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta FH ad rectam DA: ut autem FH ad DA, ita fumpta communi altitudine recta ST, rectangulum fub FH, ST ad rectangulum fub DA, ST, hoc eft, ita quadratum 34 ad quadratum MN; five circulus diametri 35 ad circulum diametri MO. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 35, ad circulum diametri MO. Addatur hinc quidem ratio altitudinis HT ad altitudinem TA; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes funt eædem; ex conftructione igitur, ratio compofita ex rationibus circuli 35 ad circulum MO, & altitudinis HT ad altitudinem TA, hoc eft ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28, & 28 ad 27; quæ ambæ rationes conftituunt rationem 26 ad 27, ut propofitum eft.

Hic mirabilis quædam proprietas accidit circa plana fpatia hyperbolica hujus conftructionis, illa nempe FG86, 6853, 35 ZX, XZVS, &c. quæ omnia funt æqualia, pofitis continuè proportionalibus rectis BH, B7, B4, BY, &c. ut fupra cujus quidem proprietatis demonftratio non erit difficilis ei qui animadverterit omnia parallelogramma iifdem fpatiis infcripta, effe æqualia; ficuti & circumfcripta æqualia.

Tandem fi afymptoti hyperbolæ non fint ad angulum rectum, vel eædem erunt ex fe demonftrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractione conorum quorundam, fient eædem.

Cæterum, Reverende Pater, hoc fcias velim, me magnifacere adeo Excellentem Virum, etiam ultrà quàm verbis aut litteris exprimere poffim. Fac etiam, obfecro, ut ipfe innotefcat noftris Geometris, præfertim D. D. *De Fermat*, *&* *Defcartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipfi Archimedi jure quis poftpofuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratiffimum quid facturus fis.

EPISTOLA
EVANGELISTÆ TORRICELLII,

AD

ÆGIDIUM PERSONERIUM DE ROBERVAL.

CLARISSIMO VIRO

ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIVS

S. P.



LOQUAR aperte tecum sine interprete, VIR CLARISSIME, quis enim dissimulare possit? Et quanquam litteræ tuæ ad clarissimum Mersennum missæ sint, cohibere tamen non possum animi mei impetum, quin ad te currat, tibique totum se dedicet tanquam Apollini Geometrarum. Fortunatas certè jam existimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilifacere, quandoquidem dignæ habitæ sunt, quæ judicium tuum subirent, & animadversionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quæris an centrorum gravitatis parabolæ a priori, ut inventum a me proponatur, aut quæratur ut ignotum: erubescerem certè ignotum theorema inter alias propositiunculas meas a me demonstratas collocare. Ostendimus illud unica, brevique demonstratione; sed ea occasione admiratus sum fœcunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum solida, non solùm geometricè, sed etiam mechanicè considerata, & ad mensuram scientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortasse non habebo; siquidem difficillimæ, nisi fallor, contemplationis censeo hujusmodi theoremata. Præterea immorari non soleo circa figuras non vulgatas, & circa solida quæ si nova sint, saltem ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipue ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto succedet, communem litteratorum applausum sortiatur, neque sit qui invideat figuras a me ipso fabricatas. Mensura cycloidis, (hoc enim nomine Clarissimus Galilæus appellavit 45 jam abhinc annis figuram quæ fortasse tibi nunc trochois est) mihi sese ultrò obtulit

non

non speranti, penè dixi non quærenti. Illam deinde quinquies diversis semper principiis demonstravi. Quoad solida nihil habeo: tangentem prædictæ lineæ jam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilæi alumnus, etiam nunc adolescens Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acutissimum & feracissimum, illam ex se observare potuisse nemine indicante; hujusmodi enim lineæ natura familiaris erat, constatque ex compositione duorum motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc testes quibus olim Galilæus irritas lucubrationes suas communicavit circa hanc figuram; imò supersunt paginæ aliquot clarissimi Mathematici, in quibus & picturas & aggressiones suas nonnullas circa hoc subjectum jam adolescens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc proposuit ille mirabili Geometræ Cavalerio nostro, ipsique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe se olim experimentum fecisse, appensis ad libellam spatiis figurarum materialibus, quantuplum esset cycloidale spatium ad circulum suum genitorem, & semper illud invenisse, nescio quo fato minùs quàm triplum; ideo incœptam contemplationem deseruisse, ob incommensurabilitatis suspicionem. Quod si aliquando, inconstanti fallacia, reperisset minus quàm triplum, aliquando verò majus, tunc asserebat Linceus Mathematicus ulteriorem contemplationem prosecuturum fuisse; rejectâ scilicet variationis causa in materiæ inæqualitatem atque rasuræ.

Propositionem illam de solido a qualibet coni sectione circa axem revoluta descripto, atque de ejusdem solidi centro gravitatis, unica simul brevique demonstratione ostendimus, supposita tantum modica Apollonii cognitione. Verùm duplex theorema inter neglecta a me rejicitur; nullum enim habebit locum in opusculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad solidum hyperbolicum, jam non meum sed tuum, disperеam si jam ampliùs spero me visurum tam sublimem & tam

doctam

doctam demonstrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clarissime atque Ingeniosissime, tam acutis demonstrationibus, tantâque doctrinæ affluentia, unicam ineptiolam meam illustrare dignatus sis. Gratias primùm ago maximas. Deinde ut desiderio tuo satisfaciam, methodus mea circa demonstrationem hujus solidi diversissima est a tuâ. Altera quidem ex meis aggressionibus per doctrinam indivisibilium procedit, quæ si cum erudito lectore semper ageretur, paucissimis verbis expediri posset: altera verò per inscriptionem & circumscriptionem, more Veterum, non adeo expedita est, sed facilis, & fortasse curiosa. Hoc unum reperi in tua scriptura, quod conveniat cum meis, nempe constructio illa pro secando frusto solidi hyperbolici in data ratione; demonstrationes verò ab eadem constructione dissimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnosco hyperbolas in laudibus quibus me exornas, quàm in demonstrationibus quibus hyperbolicum solidum ipse metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam, ut in lectione operum tuorum, quæ avidissimus expecto, illa intelligere valeam, fructusque scientiæ suavissimos, & divitias ingenii inæstimabiles inde colligere possim, & intellectum meum ditare. Vale, VIR CLARISSIME, tuorumque Operum editionem accelera, in publicam litteratorum omnium utilitatem.

Florentiæ Kal. Octob. 1643.



EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD

EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

EPISTOLA
ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL
A D
EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

IR CLARISSIME

Si me unum respicerem; si nulla existimationis nostræ, si nullâ cæterorum hominum, si nullâ ipsius, quam præ cæteris diligo, veritatis habitâ ratione, internâ animi tranquillitate conquiescerem: non me moveret profectò, quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis, quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini, quòd denique nullum non moveatis lapidem, ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear: quippe qui planè mihi conscius sum, ex iis quæ ad vos scripsi, nihil non verum esse; sed fateor ingenuè, longè absum a præstanti illo vitæ philosophicæ statu, tantámque beatitudinem si optare nobis licet, non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus, inter multos educatus, cum multis vivere atque conversari assuetus, cum multis etiam necessitudines contraxi; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondum didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra, quam tueri, quámque, si quo id labore liceat aut impendio, promovere tenemur; postulant amici, collegæ, Mathematici Galliarum præstantissimi, quibus omnia me debere fateor; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas: ne tam gravem vestram accusationem prorsus negligam, præsertim quam nullius negotii fuerit refellere; cùm præter rationes nostras, quæ per se sufficiunt, iisdem ambo testibus utamur. Erit etiam quod de vobis expostulem, & ut spero non injuriâ, qui cùm festucam in nostris oculis

quæratis, trabem in veſtris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimiùm rigidè, meo quidem judicio, quaſi aliquid nobis timendum minati eſtis: quin potiùs optarim tales iras, ſuaviſſimi commercii redintegrationem eſſe. Quod ſi inter nos, per nos ipſos conveniri non poteſt, judicent amici: nos judicio ipſorum ſtare promittamus. Ad rem venio.

De propoſitione Rotæ atque Trochoidum illius, primùm audivi Pariſiis anno 1628. (eo enim demum anno ab expeditione Rupellana reverſus, ſtatui in maxima illa atque omni ſtudiorum genere excultiſſima urbe, firmas ſedes ſtabilire; cùm antea vagus, incertis ſedibus, diverſis in regni Gallici partibus degiſſem) aſſeruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Merſennus, talem quæſtionem per multos jam annos a pluribus tentatam, euſque inſolutam permanſiſſe: cui ego reſpondi, hoc ei commune eſſe cum multis aliis vetuſtiſſimis nobiliſſimiſque propoſitionibus; neque ideo quicquam in illa magis quàm in his mirandum videri, ſi unà cum illis ſolutione careret. Ac tunc ipſe, cùm difficillimam exiſtimarem, certè ſupra vires meas, intactam ita dimiſi, ut per ſex annos de illa ne quidem ſomniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annum agens vigeſimum ſeptimum, etiamſi continuo decennii anteacti exercitio, diſcendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profeciſſem; tamen, neque eum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires ſuſceperam, quæ ad ejuſmodi quæſtiones ſufficerent. Interea, cùm mecum ipſe ſæpius cogitarem, quâ potiſſimùm ratione poſſem in ſuaviſſimæ Matheſeos adyta penetrare, ſtatui divinum Archimedem, quem ferè unum inter antiquos Geometras ſuſpicio, attentiùs conſiderare; ex qua conſideratione ſublimem illam & nunquam ſatis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi: ſic enim tunc vocabam eam quæ a Clariſſimo Cavallerio vocatur doctrina indiviſibilium. Ridebis for-

forſan; &, Hic ergo Gallus, inquies, non ſolùm trochoidum dimenſionem ante nos, ſi Diis placet; non ſolùm parabolarum omnium, non ſolum ſolidorum ad has & illas pertinentium, non ſolùm planorum ab helicibus cujuſcunque gradus aut dignitatis compræhenſorum, non ſolum earumdem helicum ſecundùm longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non ſolùm curvarum omnium tangentes per motuum compoſitionem, non ſolùm doctrinam centrorum gravitatis invenerit, ſed & præſtantiſſimi noſtri Cavallerii indiviſibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarius ille impune eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non ſolùm inveni, ſed & vulgavi: an vultis ut verum reticeam quod partes noſtras adjuvat, falſum autem proferam quod nobis nociturum ſit? nos ætate aut tempore ſaltem priores, ætatis aut temporis beneficia reſpuemus, & junioribus aut ſaltem tempore poſterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage ſtultam illam in noſmetipſos injuſtitiam. Quòd ſi cuncta ego unicâ epiſtola quam ad vos ſcripſi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde ſatis prolixa extitit, nec id neceſſarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam, quid de paucis aliquot propoſitionibus enumeratis gloriari attinet?

Pauperis eſt numerare pecus.

Sed de vobis plura poſtea: nunc de Indiviſibilibus, quoniam illa ad rem faciunt, dicamus. Illa ergo, an ante nos clariſſimus Cavallerius invenerit, neſcio: certè illud ſcio, me integro quinquennio antequam in lucem emiſerit, eâ doctrinâ uſum fuiſſe in ſolvendis multis, iiſque planè arduis propoſitionibus. Attamen, abſiſte moveri; ego tanto viro, tantæ ac tam ſublimis doctrinæ inventionem non eripiam; nec poſſum; nec ſi poſſim, faciam. Ille prior vulgavit: ille, hoc jure, ſuam fecit: ille, hoc jure, habeat atque poſſideat: ille tandem, hoc jure, inventoris nomine gaudeat. Abſit ut in poſterum, quod nec priùs feci, in tali

cauſa,

causa, intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam; præsertim cùm nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim, quam neque publici juris facere, nisi post aliquot annos, juvenili quodam mei ipsius amore, decreveram. Quippe sperabam interim, fore ut solutione difficiliorum quæstionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam, doctrinæ famam facilè consequerer: neque sanè hæc spes ex toto me fefellit. Postquam enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem, eandemque ad puncta, ad lineas, ad superficies, ad angulos, ad solida præcipuè; postremò etiam ad numeros extendissem, haud fuit difficile ea exequi propter quæ amici lætarentur, invidi disrumperentur. Exultabam ergo nimiùm juveniliter, ac tanto diligentiùs doctrinam ipsam reticebam; dignus planè in quem Poëta dixerit,

Nec ferre videt sua gaudia ventos;

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ, dum grana quædam ex ea decerpta ostento, ut ex divitibus ac beatis quidam habear; interim alius eandem a se quoque detectam, palàm, plaudentibus omnibus, ostendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum sit ne ridear, si a me quoque inventam fuisse affirmavero. Est tamen inter clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quædam differentia. Ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundùm infinitas lineas; solidi autem indivisibilia secundùm infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; sed & quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud, certè hoc unum satis habent, ut in magnorum Virorum opera insurgant, quòd a se minimè profecta esse invideant, occasionem carpendi Cavallerii arripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficiebus reverà constare vellet. Quanquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantiæ aut invidiæ titulum, tamen iidem coram imperitis, suâ authoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab iis illæsus evasit Cavallerius. Nostra autem

autem methodus, ſi non omnia, certè hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita noſtra ſeu indiviſibilia ſic conſideramus. Lineam quidem tanquam ſi ex infinitis ſeu indefinitis numero lineis conſtet, ſuperficiem ex infinitis ſeu indefinitis numero ſuperficiebus, ſolidum ex ſolidis, angulum ex angulis, numerum indefinitum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; ſingula enim ſuas habent utilitates. Dum autem ſpeciem aliquam in ſua infinita reſolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progreſſionem inter partium altitudines aut latitudines ferè ſemper obſervamus. Sed de hoc ſatis ſuperque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indiviſibilium multa protuliſſem, tandem anno 1634. celeberrimus P. Merſennus trochoidem in memoriam revocavit, non ſine gravi expoſtulatione, quaſi propoſitionem haudquaquam ignobilem, de induſtriâ præterirem difficultate illius perterritus. Ego ſic caſtigatus cœpi ſedulò ipſam inſpicere; ac tunc quidem, quæ abſque indiviſibilibus difficillima viſa erat, ipſis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noſter ab aliis omnibus quos huc uſque videre contigit, longè diverſus eſt; & niſi me nimiùm amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium ſimpliciſſimus, breviſſimus, univerſaliſſimus, & ad ſolida detegenda aptiſſimus exiſtat, ut ſolus ſponte a natura productus, cæteri per vim ab arte efficti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam ſi ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te ſcripſi, & horum omnium teſtem locupletiſſimum (præter quàm plurimos alios, quorum epiſtolas de hac re etiamnum apud me aſſervo) ipſum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Merſennum. Vide ergo num ſit cur doleam, cùm vos per exprobrationem objicitis propoſitionem illam forſan ante obitum Galilæi nondum fuiſſe inventam, qui tamen vixit uſque ad annum 1642. præcipuè, cum jam ad vos ſcripſerim me anno duodecimo jam elapſo inveniſſe. Ut ſic mihi tot teſtes habenti, & cui una ſuffi-

cere debuit veritas, fidem omnem denegetis. Inventâ infiniti doctrinâ (liceat adhuc eo nomine uti in hac epistola; posthac, absit) eaque, pro tempore satis probè excultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primùm, vi Analyseos, methodum quandam reperi, quæ, etiamsi longè postea universalis esse deprehensa sit, tamen recens inventa, talis non apparuit: quærebam verò universalem; & particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides nostræ occasionem dederunt cur ad motuum compositionem respicerem. Occasio satis fuit, ac propositionem universalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumferuntur hac de re lectiones nostræ a nobilissimo D. *du Verdus* nostro discipulo collectæ, atque a multis exscriptæ. Itaque jamdudum fide publicâ nobis asserta est talis doctrina, nec alii testes quærendi, qui omnes habeamus. Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante amplissimo senatore Domino *de Carcauy*, cœpi per Epistolas commercium litterarum habere cum amplissimo senatore Tholosano Domino *De Fermat*, de quo quid sentiam habes in ea Epistola quam ad R. P. Mersennum direxi super solido vestro hyperbolico infinito. Is ergo vir præstantissimus, primus omnium, duas propositiones nobilissimas ad nos misit sine demonstratione: alteram de parabolis, alteram de planis helicum, utrisque per omnes dignitatum gradus sumptis. (Ne ergo dubites ampliùs, quis primus tales quæstiones proposuerit; illæ meæ non sunt; quanquam illas ego proprio marte, inventâ ad id peculiari nostrâ methodo, demonstraverim) immo universalius multò quàm ipse proponas: quippe non solùm potestates in helicibus proposuit, sed etiam potestatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice semidiametri omnium revolutionum ordine sumptarum, se habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. numerorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. &c. quarum primam (quadraticam putà) reperies in prima revolutione dimidiam partem sui circuli constituere. Cùmque ipsum arduarum (ut tunc) propositionum

tionum demonſtrationes rogarem, ille in hæc verba reſcripſit, *Ego*, inquit, *ut invenirem laboravi; labora & ipſe: in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem conſiſtere deprehendes.* Quid facerem a tanto viro incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita noſtra advocavi; (nondum enim tunc noſtra ampliùs non eſſe reſciveram) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolarum plana, ad ſua parallelogramma; & earumdem ſolida, ad ſuos cylindros; & ſpatia helicum, ad ſuos circulos feliciter comparari poſſe, ſi innoteſceret in numeris ratio ſummæ poteſtatum omnium ejuſdem generis, ordine, atque indefinitè ſumptarum, ad earum maximam toties ſumptam; idque in omni genere poteſtatum. Quod quidem non difficulter aſſecutus ſum. Illicò enim patuit ſummam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinitè ſumptorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. ad eorum maximum toties ſumptum quot ſunt illi quadrati; hoc eſt ad cubum ejuſdem radicis cum maximo illo quadrato collatam, ſe habere ut 1 ad 3, ſive conſtituere $\frac{1}{3}$; ſummam cuborum eodem modo ſumptorum, ad eorum maximum toties ſumptum, ſive ad quadrato-quadratum ejuſdem radicis cum maximo cubo, ſe habere ut 1 ad 4, ſive conſtituere $\frac{1}{4}$; ſummam quadrato-quadratorum, eodem modo conſtituere $\frac{1}{5}$; atque ita in infinitum. Ex hac propoſitione quæ ſola ſufficit, innumera deduxi corollaria, qualia ſunt hæc: Summa radicum quadratarum numerorum omnium, ordine naturali, atque indefinitè ſumptorum, ad earumdem radicum maximam toties ſumptam, collata; putà ſumma radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eam habet rationem quam 2 ad 3; ſumma radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali, atque indefinitè ſumptorum, ad earumdem radicum maximam toties ſumptam, ſe habet ut 2 ad 4; ſumma radicum quadratarum omnium numerorum cuborum, ad maximam toties ſumptam, ut ſuprà, ſe habet ut 2 ad 5; atque ita in infinitum, radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, cubo-

cuborum, &c. ad earum maximam toties ſumptam, ut ſuprà, ſic comparabuntur, ut antecedens rationis ſit ſemper 2 exponens quadrati; conſequens verò ſit ſumma ex ipſo exponente 2 & alio exponente ipſius gradus ad quem pertinent numeri quorum ſumuntur radices quadratæ. Ut ſi ſumantur radices quadratæ numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui ſunt ſeptimi gradus cujus exponens eſt 7, erit conſequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, ſumma omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc eſt in primo gradu, atque indefinitè ſumptorum, ad earumdem radicum maximam toties ſumptam, ſe habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compoſitum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; ſumma omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earumdem radicum maximam toties ſumptam ut ſuprà, ſe habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicæ omnium graduum, ad earumdem maximam ſumptam ut ſupra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, conſequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica ſumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratæ omnium graduum, ad earum maximam ſumptam ut dictum eſt, comparabuntur, eritque antecedens 4; & ſic in infinitum infinities, ut ſatis ex prædictis patet. Hæc cùm ad ampliſſimum virum ſcripſiſſem, dubitavit num eorum demonſtrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam eſſe facillimam, per duplicem poſitionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes poteſtates. Quo pacto, facilè eſt concludere in quadratis, exempli gratia, ſummam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, ſed finitè, ſumptorum, ad eorumdem maximum toties ſumptum, collatam, majorem eſſe quàm $\frac{1}{3}$; at dempto ab eadem ſumma, ſeu ab antecedente rationis, ipſorum quadratorum maximo tantùm, remanente integro conſequente, reliqui rationem minorem quàm $\frac{1}{3}$. Nec ad id demonſtrandum, aliò recurrendum eſt quàm ad geneſim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur

natur ex proximo quadrato minore, ex duplo radicis ejusdem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris, atque ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum quadratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab unitate incipientes, atque ita de singulis potestatibus, secundum uniuscujusque genesim. Corollaria, quomodo ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi: illud autem tale est. Propositis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate, secundùm naturalem numerorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. usque ad 100000000 exempli gratiâ; exhibere summam quadratorum, aut cuborum, aut quadrato-quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. omnium talium numerorum: quæ sanè regula, pro quadratis, & cubis, reperitur specialis apud Authores; at pro omnibus potestatibus, nullam apud illos reperimus universalem. Hæc ergo fuit nostra pro parabolarum planis ac solidis, simúlque pro planis helicum, methodus. Post hæc proposuit vir amplissimus (quod & ipse jamdiu in omnibus figuris universaliter quærebam) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analysim recurrit, nos ad nostra infinita; unde methodus illius, ut plerisque inventis analyticis accidit, abstrusissima est, subtilissima, atque elegantissima: nostra aliquot mensibus posterior, simplicior evasit, & universalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arrideat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutus esse Geometra, qualis huc usque nullus apparuit. Quoniam verò hoc nostræ hujusce dissertationis præcipuum caput est, ac vos non obliquè aut occultè, sed directè & apertè innuistis methodum nostram, quam tamen huc usque nondum vidistis, illius quam circa finem anni 1644 ad R.P. Mersennum a vobis missam legimus, esse inversam, ac proinde nostram a vestra fuisse desum-

ptam; quo posito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epistolas ad amplissimos celeberrimosque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, gravissimis querelis impleveritis; quò nos nihil tale meritos, acerbissimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcirco & locus & res postulat ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè possumus, a nobis propellamus. Ad hoc autem satis superque futurum speravi, si nostram illam methodum ad vos cum demonstratione mitterem; non quidem suis omnibus numeris absolutam, nimis enim longa est, sed sic digestam, ut a vobis, aliisque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indivisibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longos ac difficiles anfractus sequi malint. Hoc pacto, cùm illa nostra a vestra planè diversa sit, ac diversis omnino fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis ereptam conqueri jure possitis. Eam ergo seorsim cum suis figuris conscripsimus, ne hujus epistolæ lectionem interturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eo modo quo proposita est, universalem quidem esse absoluto Geometræ, attamen eandem a priori raro procedere (universalem autem a priori invenire, hoc est ex sola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ quavis figurâ, aut lineâ comparatione factâ, vix sperandum puto: quæ tamen si haberetur, & circuli & hyperbolæ, aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum simul haberetur) siquidem illa in figuris, vix solâ plani cum plano aut solâ solidi cum solido comparatione contenta, utramque simul & plani & solidi aut etiam altioris speciei comparationem persæpe requirit. Immo, illâ methodo, solidorum centra vix directè, sed plerumque indirectè tantùm, putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inservit, nisi ipsæ lineæ, earumque proprietates quædem ex præcipuis ac specificis examinari geometricè possint: quæ omnia ex adjectis exemplis post ipsam

psam methodum seorsim videre licet. De methodo Domini *De Fermat*, nisi eam adhuc videris, hoc scies, ipsam trianguli, atque planorum parabolicorum omnium & solidorum ab iis ortorum centra a priori elegantissimè ostendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare, hic labor; cùm ne quidem a posteriori, reliquis figuris huc usque inservierit; quanquam forsan, quominùs id fieri possit, nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet, meministi opinor, Vir Clarissime, methodum vestram non ante annum 1644 Parisios missam fuisse, atque eandem tunc admodum recens inventam: siquidem, ut ex vestris literis patet, vobis eâ adjutis, solidi trochoidis circa basim mensura paulò ante demum patuerat, quam sub finem anni 1643 nondum habebatis: hæc enim sunt vestra verba in primâ vestrarum ad me epistola, *Quoad solida, nihil habeo*. Ego verò meâ methodo usus sum jam ab anno 1637, atque illius ope, & planorum parabolicorum omnium, & solidorum centra jam tum inveneram; quorum centrorum quæ ad dimidios fusos parabolicos pertinent, enuntiavi eâ epistolâ quam ad R. P. Mersennum de vestris inventis scripsi anno 1643, quo primùm anno de Torricellio Parisiis auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquam integro priusquam vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644 fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est, ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644 tanquam nostra, immo verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potiùs præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cùm in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitus diversa,

versa, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asserere, & fructibus ab ea productis tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertraherent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cùm interea tantopere, & quidem meritò, gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verissimile esse, cùm reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam genio scripsimus. Tu, cùm magnifaceres centra, quia ex iis solida deducere posse confidebas, solida autem præcipuè intendebas; ideo centrorum inventionem magnificè extulisti, nec cæteris posthabendam, immo præhabendam judicasti. Ego contrà, quia sine centris solida & quæsivi & viâ Geometricâ inveni; datis autem solidis, statim, & absque labore centra sequebantur. Ideo centra ne respexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omnino ex præmissa nostra methodo, dato plano quod dudum habebam, sola solida mihi quærenda superesse; centra autem simul cum plano & solidis haberi. Quòd si apologo uti liceat: ego sim Æsopi illius Phrygis statuarius: plani trochoidis mensura, esto mihi summi Jovis statua; mensura solidi, statua Neptuni; centrum autem, esto statua Mercurii. Jam adsit nobis e cœlo sub forma hominis ignoti Mercurius ipse, Jovis & Majæ filius, interrogetque, Quanti statua Jovis? Indicabo sanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de statua Neptuni: ego & ipsam alicujus pretii indicabo. Tandem interroget de sua ipsius Mercurii statua, quid ego? quid autem aliud nisi hoc? Amice? si priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi

tibi dabo. Itaque, Vir Clarissime, quæ tibi Jovis aut Neptuni statua merito fuit, illa nobis Mercurii tantùm statua extitit. Ignosce, si placet, stylo; hoc usi sumùs ut mentem nostram aperiremus. De R. P. Mersenno, quid scripserit in ea epistola cujus verba toties repetita contra me adducis, nescio: quid autem illi dixerim ego planè memini, nec ipse omnino oblitus est; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ sæpius pro te citasti. Sed rursus, nos ex mente nostra locuti sumus; ille, ut intellexit, sic scripsit: vos ex mente vestra interpretati estis; ac illa vestra interpretatio a nostra mente alienissima est. Omnibus tamen attentè consideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clarissime, censui præcipuam malæ interpretationis culpam in vos recidere: neque enim verba illius, quæ ipse adducis, a nostro sensu adeo aliena fuerunt, quin ab iis verum illum nostrum sensum facilè perspexisses, si æqui interpretis personam tibi assumere voluisses. Scripseras ad ipsum te utrumque trochoidis solidum beneficio centrorum priùs inventorum detexisse: ac illud quidem quod circa basim, ut se habet revera, enuntiaveras ut 5 ad 8; quod ille cùm verum sciret (jam dudum enim ego illi tale indicaveram) non ægre persuasus est, & alterum quoque circa axem tale esse quale affirmabas ut 11 ad 18. Lætus itaque statim ille mihi per literas significavit habere se quod mecum communicare vellet. Adivi; epistolam tuam legi, ac circa illud postremum solidum tantùm quod circa axem, immoratus sum; quippe quod nondum habebam, nisi in terminis vero admodum proximis, extra quos excurrebat ratio illa a vobis assignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de nostris terminis nullum nobis supererat dubium, illico animadvertimus rationem illam vestram 11 ad 18 verâ esse minorem. Cùm igitur super hâc re cogitabundus hærerem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, dices de clarissimo Torricellio? nonne insignium adeo theorematum cognitionem ipsi te debere fateberis? Faterer, respondi, si vera essent; at talia non esse certus sum: miror sanè quod vir talis falsum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud suspicari possum, nisi quod ille

 mecha-

mechanicâ quâdam ratione, per approximationem, hujusmodi rationem a vero non admodum longè aberrantem invenerit, existimaveritque veram rationem non posse detegi; ac proinde suam haud veram esse, a nemine posse demonstrari. Hæc, inquam ego tùm, oratione, fateor, planè scyticâ; quam ille suâ ad vos epistolâ lenivit, pro suo genio qui omnino mitis est, ut ex stylo ejus satis perspicere potuistis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, si vera essent; planum est me non intellexisse de solido circa basim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos scripseram; neque de centro trochoidis, quod dato tali solido, unà cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de solido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamsi brevî habiturum me confidebam, tamen jure præscriptionis, vestra fuissent, si vestra illa enuntiatio cum vero congruisset. Hinc sanè nemo non videt minimè difficile fuisse, ex verbis epistolæ R. Patris quæ vos toties citavistis, verum sensum qualem jam attulimus, elicere: sed nescio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis nostris, ut ipse sæpe loqueris, inter nos suscepta est. Itaque, ne quid in posterum simile accidat, si tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agetur de propositione Mathematica cujus discussio ad me pertinebit, ne cujuscunque literis fidem habeatis, nisi manu meâ illæ obsignatæ sint: sic enim fiet ut ego mea tantum, non etiam aliorum scripta, ex meo sensu interpretari tenear. Nam, pace amicorum hoc dictum esto, hac in materia, soli mihi fidere assuevi, jamdudum expertus, interpretes plerosque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non satis intelligunt, omnia literis obscurare ac prorsus deformare. Unde qui tales literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditiis avidè sese ingurgitant, vel quod obscurum est ad placitum sibi sensum detorquent, fit necessariò ut & scribentis & primi authoris verum sensum longè relinquant. Ac hujusmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipsius literis, ex proprio tuo sensu,

ſu, ſine interprete ad R. P. Merſennum ſcriptis, in quibus hæc habes: *Tibi verò, vir clariſſime, corollariolum mitto ex ipſis hyperbolis deductum. Quadratura quædam eſt, quarum centenas, immo infinitas poteram mittere, niſi vidiſſem ſatis ſuperque eſſe unam, ut ſtatim omnes emergant.* Deinde in iis quas ad nos ſcribis, quas ipſe R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes: *Si unius hyperbolæ primariæ quadratura tam diu quæſita eſt, nos pro una infinitas damus.* Ex quibus verbis ſtatim exiſtimavit R. P. primariæ hyperboles quadraturam a te inventam fuiſſe. Itaque cùm aliquo poſt tempore, de ipſis qudraturis cum eo colloquerer, diceremque non difficulter illas aſſecutum eſſe me: Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam? Nequaquam, reſpondi; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iiſdem legibus addictæ ſunt. Memiſellum, inquit, quantâ ſpe decido, qui ubi Cleopatræ aut etiam majoris pretii unionem ſperavi, ibi vitreas tantùm ampullas reperio! Sed de hoc ipſe forſan reſcribet: ego verò ideo ſcripſi, ut tali exemplo monerem hac in materia non eſſe tutum interprete uti; cùm etiam abſque hoc tantæ eveniant allucinationes. His ergo noſtris rationibus, acerbiſſimæ veſtræ accuſationis argumentis luculenter reſpondiſſe, atque cumulatè ſatisfeciſſe ſperamus. Nunc verò

Aſpice num mage ſit noſtrum penetrabile telum?

Videamus, inquam, nuc, num ſit quod de vobis multò potiori jure queri poſſim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem noſtram, poſtquam & a R. P. Merſenno & a nobis moniti eſtis, jam a multis annnis eam noſtram eſſe, eamque brevi a nobis in lucem emittendam, poſtquam veſtris ad ipſum R. P. & ad me literis polliciti eſtis vos talem meſſem nobis relicturos intactam; tamen omni jure, ac veſtrâ etiam fide violatis, tanquam veſtram non literis modo manuſcriptis (quanquam neque hoc ferendum fuerit) ſed libello ad id prælis commiſſo, vulgaviſtis? idque interim, ac eodem prorſus tempore quo continuis veſtris literis contraria promitteretis? Hæccine veſtra religio? hæc conſuetudo?

Bbb 2 Quòd

Quòdsi ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem evicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hâc re ad vos scripsi animum adverteritis, facilè ex iis percipietis de me dici posse:

Vultu simulat: premit altum corde dolorem.

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Mersennum tum ad amplissimum D. *de Carcavy* scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coram vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omnino statuisse; ut sic & injuriâ, & mulctâ simul afficeremur. Sed de hoc satis: nunc ad alia capita transeamus.

Rursus igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundùm longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo tale theorema vulgavi, idemque meo nomine prælis mandavit R. P. Mersennus? nonne vos ab amicis resciviftis, ac tum demum anno 1645 ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hâc re vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrâ manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solùm parabolam conicam cum helice Archimedea comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immo & quemlibet helicis arcum vel partem, sive ex centro incipiat sive non, & sive primam revolutionem excedat sive non, demonstrasse cuidam lineæ parabolicæ esse æqualem. Quid hoc rei est? Gloriaris de rebus nostris tanquam si tuæ illæ sint; atque id postquam nostras esse sic rescivisti, ut nisi rescivisses, nequidem de illis forsan unquam somniasses. Nec est quod fingas existimasse te nos solam helicem Archimedeam considerasse; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & absque

ullo

ullo fundamento; cùm una eademque sit illius & cæterarum, demonstrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, si modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice sibi propriâ sic se habet, ut si portio axis parabolæ, comprehensa inter ordinatim applicatam ad axem, & tangentem a termino applicatæ ductam, æqualis esse intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice: (intellige helices planas, nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis semidiametro ejusdem circuli: tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis sit longitudine helici primæ revolutionis. Quòd si in eadem parabola sumatur a vertice quævis portio; a principio autem helicis propriæ sumatur etiam portio, a cujus termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis sit rectæ a termino sumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ: erunt & hæ portiones æquales. His sic a nobis inventis, si quis quidpiam addiderit; aut si imitando similia effecerit, habeat sanè quam ipse laudem merebitur. In helicibus conicis existente cono recto, omnia se habent ut suprà; modò tantùm loco semidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipso cono existit, sumatur recta a vertice coni ad circumferentiam ejusdem circuli terminata. Hic autem, centrum helicis erit vertex coni; & quæ a centro ad puncta helicis ducuntur rectæ, erunt portiones laterum coni ejusdem. At equidem rescivisse me fateor, dices. Verùm demonstrationem proprio marte adinveni. Esto: quid inde? Sanè si quæstionem proposuissem tantùm, non etiam solvissem, illa tua fuisset, qui prior solvisses: nunc quando prior solvi ego, & solutam vulgavi, mea est; nec mihi, etiamsi omnes conentur, verè eripi potest. An, quæso, meæ aut etiam vestræ sunt parabolarum Domini *de Fermat* quadraturæ? aut spatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio marte invenimus? Quid de ipsis speretis vos, nescio sanè: ego certè, quanquam mea multò quàm vestra potior sit causa, ipsam tamen prorsus desero. An meum est solidum ve-

ſtrum hyperbolicum? an mea hyperbolarum veſtrarum novarum quadratura? minimè verò; attamen amborum ipſorum theorematum demonſtrandorum una eademque eſt methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos miſimus veſtro ſolido accommodatam, quamque iiſdem hyperbolis accommodare non admodùm difficile eſt. Reperi quoque in illarum ſingulis, ex parte unius tantùm ex aſymptotis, reſecari poſſe ſpatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen ſpatio finito atque undique clauſo ſit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne iſtis hyperbolis occaſionem dedere parabolæ illæ Domini *de Fermat*? Nonne etiam illa noſtra propoſitio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus anſam præbuit illi alteri de qua adeo magnificè gloriaris? de illo, inquam, helicum genere quæ deſcribuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim ſecundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam aſſeris æqualem? Quæ autem ſit illa recta, & quomodo ad datas ſe habeat, tanquam ſi Cereris Sacrum ſit, planè reticuiſti. Non tamen nos latet, eam æqualem eſſe hypotenuſæ cujuſdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale ſit rectæ a centro ad terminum helicis ductæ: ſed enim, quis triangulum iſtud dabit, ex hypotheſi quod dentur poſitione & longitudine duæ ex iis rectis quæ a centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque ſi dederis, Vir Clariſſime, vel alterutrum tantùm, ego munus id eo munere compenſabo, quod vel ipſe duplo pluris facias. Sed cave: hìc via præceps eſt & lubrica; ac talis, ex qua ad parallogiſmum lapſus ſit facillimus: niſi tamen quod petimus datum fuerit, propoſitio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertiſſe, propoſitionem hanc non eſſe novam, ſed ipſam prorsùs eandem eſſe cum antiqua illa, quâ quæritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur ſecundùm uniformem ad ſuum horizontem inclinationem; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm verò minimè

mè nova fit propofitio, teftabitur ipfe R P. Merfennus. Verùm, quia datâ inclinatione, hoc eft, dato fpecie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato infuper uno ejufdem helicis puncto, putà in ipfius terræ fuperficie; non poterat geometricè, nec etiam fuppofitâ circuli quadraturâ, affignari aliud in ea punctum; ideo illa inculta permanfit, ac ferè ex toto neglecta eft. Neque rurfus, idem folum aut primum genus eft earum helicum, quæ finitæ cum fint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones abfolvunt: tales enim & longè antiquiores funt illæ quæ in globis terreftribus atque in mappis mundi, loxodromias feu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ fint; & tamen circa utrumque polum infinities circumvolvantur. Cumque fic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant, quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvolvetur, ac fimul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter fecundùm rectam eandem legibus quibufdam feretur vel a centro, vel versùs centrum, ad defcribenda infinities infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonftrantur æquales, quidni rurfus licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigefimam primam propofitionem libri primi Conicorum Apollonii, ficuti pro infinitis parabolis vigefimam propofitionem imitatus eft D. *De Fermat*? Verùm hîc omnia perfequi nec lubet nec vacat. Supereft unum expoftulationis noftræ caput circa novas noftras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix fcilicet ante biennium invenimus, nec multò poft ad vos mifimus. Poffem hîc, & fanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non mififfem*; fed illa nimis acerbam, prorfusque contumeliofam præ fe ferunt exprobrationis fpeciem: quin contrà, & mififfe lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & nifi tunc mififfem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt fpatia plana longitudine infinita, quæ tamen fpatiis finitis

nitis undique clausis sunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocavistis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine: ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propositum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipsarum figurarum in alias figuras transmutationem experior; in tales lineas incidi hac ratione.

Tab. XXVI. Fig. 3. Esto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B sit vertex; recta AB altitudo; recta AC basis; & linea BDC sit quæcunque curva: nihil enim refert qualiscunque accipiatur. Verùm, ut ex infinitis generibus aliquod hic eligamus, quod vobis instar omnium sit, esto illa curva BC ad easdem partes cava, putà ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipsa tota sit extra triangulum ABC, & eadem a puncto B ad punctum C, continuè recedat a recta BA, & ad rectam CA propiùs accedat; sumpto utroque, recessu scilicet & accessu, secundùm perpendiculares a curva BC ad rectas BA, AC ductas. Tum in ipsa curva BC, sumantur continuè a vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E, &c. a quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c. tangentes curvam BC in iisdem punctis D, E, &c. atque occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ quidem recta CK vel eidem axi AB occurret ultra verticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coinciditque cum recta CR, quam ipsi AB ponimus esse parallelam. Præterea, a punctis D, E, &c. ducantur rectæ DI, EH axi BA parallelæ, atque occurrentes basi AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipsis tangentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine parallelæ, AM quidem ipsi DF; AL autem ipsi EG, &c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M, atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque recta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursus habebimus punctum L & sic de cæteris. Quo pacto

pacto habebimus a puncto A infinita alia puncta continuo ordine dispofita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea continua AML &c. illa erit primaria noftra quadratrix: primariam vocamus, quia ipfa prima occurrit, & prima a nobis vulgata eft; cæteræ autem ab illa primaria, faltem per occafionem, dependerunt. Quòd fi tangens CK occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK, & productâ rectâ RC donec ipfi AN occurrat in N, erit & punctum N in eadem quadratrice AMLN. Aliàs autem, fi CK coincidat cum ipfa CR (cùm fcilicet ipfi AB fuerit parallela) linea AML in infinitum producta nunquam concurret cum recta RC etiam infinitè producta; fed hæc RC producta, ipfius AML productæ erit afymptotos, & punctum N a puncto C infinitè diftabit. Potuit etiam loco trilinei, affumi bilineum aut aliud quodcumque fpatium; fed omnia exequi unicâ epiftolâ, nec poffumus nec volumus, ut ii quibus inventum placuerit, habeant quod imitando addere poffint. Jam ergo, in affumpto exemplo trilinei ABC, pofitis quæ fupra diximus, fit quadrilineum quoddam ABCN duabus curvis BC, AN, & duabus rectis BA, CN comprehenfum; five id quadrilineum finitum fit versùs N, five idem in infinitum versùs illam partem abeat: hoc ergo fpatium ABCN dico effe trilinei ABC duplum. Demonftratio noftra omnino univerfalis erit pro omnibus curvis, & fpatiis; poteritque more Veterum, per duplicem pofitionem inftitui, nos tamen per infinita fic procedemus. Ducantur, aut duci intelligantur a puncto A ad infinita feu indefinita numero puncta curvæ BC, rectæ AD, AE, &c. ut fic fpatium ABC in infinita trilinea refolvi concipiatur; quæ quidem trilinea totidem rectis AD, AE, &c. ac portionibus interceptis curvæ BC comprehendantur; fpatium autem ABCN in totidem quadrilinea refolvatur, quot funt trilinea quæ quadrilinea a parallelis DM, EL, &c. ac portionibus interceptis curvarum BC, AN conftituantur: erunt ergo fingula trilinea cum fingulis quadrilineis, fuper eâdem bafi conftituta ad puncta D, E,

 &c.

&c. propter tangentes, (absque tangentibus enim falsum esset) atque in iisdem parallelis; putà trilineum ad AD cum quadrilineo ad DM, in iisdem parallelis DF, MA; trilineum autem AE, cum quadrilineo ad EL, in iisdem parallelis EG, LA, atque ita de reliquis. Quapropter singula quadrilinea singulorum trilineorum erunt ut dupla, ex legibus infiniti; & omnia omnium, hoc est totum spatium ABCN quod ex omnibus quadrilineis constat, duplum erit totius spatii ABC, quod constat ex omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, quadrilaterum ABDM, trilinei ABD duplum esse; & quadrilaterum ABEL, trilinei ABE, & sic de cæteris. Si ergo trilineum CAMLN totum extra trilineum ABC existat, ut in assumpto exemplo, erunt duo illa trilinea æqualia, sive punctum N in infinitum abeat, sive non. Quòd si præterea, eo casu quo curva AMLN tota extra trilineum ABC existit, ex punctis D, E, &c. ducantur rectæ DX, EV basi CA parallelæ, atque axi occurrentes in punctis X, V, &c. fient spatia BDX, BEV, &c. spatiis AIM, AHL, &c. singula singulis æqualia. Quoniam enim, ex demonstratione universali præmissa, totum quadrilineum ABDM, totius trilinei ABD, duplum est; & ablatum parallelogrammum AXDI, ablati trianguli AXD est quoque duplum, erit & reliquum reliqui duplum: reliquum autem primum constat ex duobus trilineis BDX, AIM; secundum verò est solum trilineum BDX: quare duo illa trilinea BDX, AIX simul, hujus solius BDX dupla sunt, ac proinde æqualia sunt inter se trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem est demonstratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL æquale esse facile demonstrabitur; & multa alia quæ consultò omittimus. Potest quoque ad solida extendi hoc nostrum inventum; si scilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantùm satis, convertantur; ac spatia quidem solida ad rectas AD, AE, &c. constituta, pro pyramidibus; spatia autem solida ad parallelas DM, EL, &c. pro

pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto solidum descriptum a quadrilineo ABCN, sive illud versùs N infinitum sit, sive non, triplum erit solidi a trilineo ABC descripti: & solidum a trilineo ACN in assumpto exemplo descriptum, duplum erit solidi a trilineo ABC descripti; & hinc habentur innumeræ species solidorum infinitè finitorum.

Possunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E, usque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales sint rectis DM, EL, &c. & per puncta BTS, &c. potest intelligi curva quadratrix BTS: hæc autem illa erit quam ad vos misimus; de qua ideo nihil est quod hic addamus: quod autem illa secundaria sit, manifestum est.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut suprà; potuit loco puncti A assumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto existens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hìc ductæ sunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter se & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma constituerent, qualia sunt AFDM, AGEL, &c. unde aliæ infinitæ generabuntur quadratrices: sed hæç nunc indicasse sufficiat. Vides itaque, Vir Clarissime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia prorsus a tuis hyperbolicis diversa genera solidorum infinitorum, & multitudine innumerabilia, & illis forsan, magis miranda; eo quòd hæc nostra de externa sua latitudine nihil unquam remittant, ut vestris necessariò accidit. Neque tamen nostra nos ad vestrorum imitationem effinximus (quod si factum fuisset, quantumcunque abstrusa, vobis tamen tribueremus) sed hæc a nostro linearum quadraticarum invento sic dependerunt, ut ab illis sejungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec solida infinitè finita præcipuè intendisse; sed nostras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione nascuntur, ex quarum origine talia

ſpatia neceſſariò conſecuta ſunt; & nobis aliud animo agitantibus, ſeſe ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis facile deducatur, ſic oſtendimus. Intelligatur in hoc noſtro exemplo, curva BC eſſe quævis parabola, ſive conica illa ſit, ſive alia: (unica enim omnibus inſervit demonſtratio) cujus axis ſit AB; vertex B; baſis AC; & recta BY ipſam tangat in vertice, occurratque rectæ NC productæ in puncto Y, ut ſit parallelogrammum ABYC ſpatio trilineo parabolico ABC circumſcriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur a ſingulis punctis curvæ AMLN, putà a punctis M, L, N, &c. rectæ MQ, LP, NO, &c. baſi AC parallelæ occurrentes axi BA producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, conſtituetur aliud quoddam trilineum ANO, cujus axis erit AO, vertex A, & baſis NO. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt MQ, LP, NO, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, DX, EV, CA, &c. ſingulæ ſingulis debito ordine ſumptis, erunt æquales; at portiones axis AO inter verticem A, & applicatas interceptæ, putà AQ, AP, AO, &c. æquales erunt rectis FX, GV, KA, &c. ſingulæ ſingulis debito ordine ſumptis: quæ omnia ex conſtructione manifeſta ſunt. Eſt autem in quavis parabola, ut FX ad XB, ſic GV ad VB, & ſic KA ad AB, propter tangentes DF, EG, CK. Quare erit quoque, poſitâ in noſtro exemplo quâvis parabolâ BDEC, ut AQ ad BX, ita AP ad BV, & ita AO ad BA, &c. Eſt ergo curva AMLN parabola ejuſdem ſpeciei cum parabola BDEC; cúmque AC, ON ſint æquales erit ſpatium AON ad ſpatium ABC, ut axis AO ad axem AB. Oſtenſum autem eſt ſpatium ABC æquale eſſe ſpatio ACN; quare ſpatium AON ad ſpatium ACN eſt ut AO ad AB: & componendo, parallelogrammum ACNO ad ſpatium ACN, ſive ad ſpatium ABC, ſe habet ut recta OB ad rectam BA. Sed ut parallelogrammum AY ad parallelogrammum AN, ita

recta

recta AB ad rectam AO; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum AY ad spatium ABC, ut recta OB ad rectam AO. Datæ autem sunt rectæ illæ OB, AO, quia AO ipsi AK datæ æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi AY ad spatium trilineum parabolicum ABC, ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex AK & AB, ad rectam AK.

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolarum circa axem AB conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum AY ad solidum ABC, ut recta composita ex AK & dupla ipsius AB, ad ipsam eandem AK.

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiæ nostræ proceres, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes, me expressis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicasse quadraturam parabolæ primariæ seu conicæ. Quis igitur meo loco constitutus, fore speravisset ut Clarissimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolas quadrandi arreptâ occasione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque est omnium methodus) hæc verba subjiceret: *Prædictæ methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, sunt quas minimi præ cæteris ego facio, non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, si ortum ducat ex aliqua parabolarum, semper parabola evenit ejusdem speciei; quod ego novum esse scio, licet fortasse turpe videatur hoc fateri.* Et rursus in alia epistola: *Quadraturas ad Clarissimum Robervallium mitto, fortasse ad subeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis*, hoc est trochoidis. Atque ita, sicuti palam nos accusaverat Torricellius, tanquam si centrum illud nostræ trochoidis, a nobis illi surreptum fuisset, sic timere se simulavit, ne eodem fato illæ suæ (si Diis placet) parabolarum quadraturæ sibi a nobis eriperentur. Quis, in-

inquam, hoc ſperaviſſet? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum eſt aut ad Torricellium pertinet, ut ei poſſit eripi? An in univerſum quadraturæ illæ ſunt Torricellii? Nequaquam. Primariæ enim ſive conicæ parabolæ quadratura Archimedis eſt; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *de Fermat*; quia cæterarum illarum medium a medio Archimedis planè diverſum eſt, & diverſum eſſe debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum eſt. Quòd ſi omnibus illud aptum fuiſſet; tunc, quantumvis ab eo diverſum eſſet medium D. *de Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Siquidem facile eſt inventis addere: authorem verò ſeſe præbere, hoc opus hîc labor eſt. Non igitur aut Torricellii, aut noſtræ ſunt parabolarum quadraturæ in univerſum; nec illæ aut ipſi aut nobis eripi poſſunt. Supereſt igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc? Quando, ſive ego vicero ſive Torricellius, ipſa res vel Archimedi cedet, vel D. *de Fermat*. Attamen quod in eo medio præcipuum eſt, noſtrum eſt, ipſo Torricellio concedente, nempe noſtra quadratrix, quam ipſe Robervallianam vocat. Quid igitur ipſi relinqnitur? Forſan, inquiet aliquis, vult Torricellius ſuum eſſe, quòd uſus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum, eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit, ut duplici poſitione inſcriptorum & circumſcriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum, quod nec ipſum univerſale eſt, adeo ſollicitum eſſe, adeoque invigilare ne ſibi eripiatur, pauperis cujuſdam eſt, qui hoc unum poſſideat, non autem ditiſſimi Torricellii, qui infinitos rerum multò pretioſiorum poſſidet theſauros. At, dicet alius: Robervallius unicam parabolam primariam ſeu conicam, Torricellius verò omnes omnino quadravit. Robervallius ſcilicet unicam! Quis autem nos uſque adeo cæcos exiſtimaverit? præcipuè cùm una eademque ſit omnium methodus quam ſuprà oſtendimus? Egone in eo quod difficilius fuit, ſi tamen quid ibi difficile dici potuit, nempe in quadratricibus

Fig. 1.

Fig. 2.

Roberval.

bus ipsis detegendis, atque in primariæ parabolæ quadratura perspicax, in facillimis repentè cæcutiero? Quin ergo saltem enuntiavisti? Satis fuit unam enuntiare; cæteræ sponte sequebantur. Quid hoc rei est? An tandem ego ea omnia ignorasse censebor, quæcunque unicâ quam ad Torricellium scripsi epistolâ expressis verbis non comprehendi? Respiciat ille ad verba nostra, ut quid voluerimus intelligat: florem mittebamus, non arborem. Ac jam decennium est ex quo absolutis nothis illis parabolis, vix animo occurrit, nisi urgeat occasio, ut illas ampliùs nominem; Torricellio verò ipsæ novæ sunt, adeoque ipsarum ille non obliviscitur, ut magnum quid putet, si centum modis illas quadraverit, cùm tamen infinitis id fieri possit. Rursus ergo, quid in illis quadraturis novum est quod ad Torricellium pertineat? Non video sanè: attamen scire gestio, ne quod illius est, quodque sibi eripi minimè passurum esse minatur, imprudentes auferamus.

Jam perspiciat quicunque Torricellii legerit epistolas, quàm multa prætereàm legitimæ expostulationis capita. Enimvero, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando scripsit super aliâ quadam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere se gloriatur? *Oro vos*, inquit, *ne inter vestra hanc etiam habeatis: nam hoc esset tollere penitus omne literarum, scientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifestum furem scribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de industriâ tacuit Torricellius: ita ut si aliquam ego aut alius quispiam proferamus, jam ipsi liberum sit illam astutiis ejusmodi, atque in longum prospicientibus verbis, sibi asserere, ac de ea locutum esse se, suâ fide affirmare.

Quis rursus feret quod ad R. P. Mersennum scribit, cùm de centro nostræ trochoidis loquitur? *Quod certe* (ait) *immo certissimè scio non habuisse Robervallium, antequam demonstrationem meam videret; ut P. V. vel ipsemet, vel tandem universa Europa testis esse poterit.* De centro illo jam satis suprà, immo usque ad nauseam; nec circa illud universa Europa testis nobis formidanda; quin, si fieri

fieri posset, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad universam Europam? Crede mihi, Clarissime Torricelli; esto (quod tamen sine arrogantia dici non potest) quòd in rebus Mathematicis ambo simus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoscamus superiores: nequaquam tamen, hoc pacto, tales erimus quos universa respiciat Europa; nempe misellos Geometras de nescio quo puncto desceptantes. Simus potiùs ambo, ego triginta millium peditum nostrorum veteranorum dux, tu totidem vestrorum: adsit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque desit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc universa forsan nos respiciet Europa.

Hoc loco, vir Clarissime, cogitare subiit quî fieret, ut cùm semel ad te scripserim (prima enim alia nostra de te epistola ad R. P. Mersennum directa fuerat) idque stylo qui meo & amicorum judicio, nihil omnino acerbi, quanquam post ereptas a te nobis nostras trochoides, redolet; ipse tamen e contrario, acri adeo stilo rescripseris; nec mihi soli, quo pacto faciliùs res componerentur, sed tribus (nescio num etiam pluribus) literis ad amplissimos celeberrimosque viros de me scriptis, haud alio argumento quam quod existimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipsius tibi fuisse ereptum. Tantusne Torricellio carum quas suas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut statim atque eas sibi ereptas putaverit,

Irruat & frustra ferro diverberet umbras,

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis sumpserit, ob quas periculum sit ne quamvis placidos acriùs irritando, ipse vicissim pœnas luat? Atqui consentaneum erat, vir prudens cùm sit, ut meminisset hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

Qui, ne tuberibus propriis offendat amicum
Postulat, ignoscat verrucis illius.

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis

bis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam a nostris jam ante plures annos tritam inieris, a qua huc usque parum deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvios, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cùm illa a te primùm detecta existimes, fit ut postea indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinities infinitè infinitum esse, idemque solidum, immo etiam plusquam solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululum vel ad dextram, vel ad sinistram, vel suprà vel infrà: curre, nata, vel etiam vola: hæc enim potes omnia, quæ sanè

pauci, quos æquus amavit
Jupiter, aut ardens evexit ad æthera virtus,
potuere;

sic enim fiet, ut, quod non semel, immo pluries jam præstitisti, & novas regiones detegas, & viros doctos non solùm adeo feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude caret; sed, quod multò laudabilius est, teipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem, pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales suas procedere.* Hanc Archimedis suppositionem nullibi videre licuit in ejus operibus: commentarios autem, forsan, non omnes legi; sed nec eorum authoribus licuit tanto viro absurdas ejusmodi suppositiones affingere. Deinde, pro excusando vestro illo fictitio trochoidis solido, hæc scribis ad R. P. Mersennum: *Habemus apud Archimedem, prop. 2. de circuli dimensione, circulum*

 ad

ad quadratum diametri esse ut 11 *ad* 14*: quaero ab ipso (Robervallio, supple) undenam putet me habuisse rationem quam ad numeros* 11 *&* 18 *reducebam?* Quæ post verba illa sequitur linea, solitam totius epistolæ redolet acerbitatem. Equidem Archimedes hæc habet: at non dissimulavit statim (nempe propositione tertia, quæ manifestò lemma est ad illam secundam) talem rationem 11 ad 14 non esse accuratam, sed tantùm veræ proximam: apud vos autem nihil tale habetur; sed vestram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam proposuistis, ex invento priùs centro tanquam accurato deductam: immo, illam pro accurata exceperunt quicunque existimaverunt vos adeo candidos esse, ut nefas existimaretis ea enuntiare quæ vera non essent. Enimvero, Vir Clarissime, plerique ex nostris vix persuaderi potuissent, Torricellium nobilem adeo Geometram, aliquid purè Geometricum sine demonstratione affirmare voluisse. Sed nec illa vestra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede assignatis pro circuli dimensione deducta est, cùm eadem extra ipsos terminos longè evagetur; unde non video quid vobis hîc proficiat Archimedis authoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non est, quantumcunque illud ad verum proximè accedere deprehendatur.

Hîc fieri posse video, ut aliquis hujusce nostræ epistolæ stylum ideo carpat, quòd ille nec amico, nec adversario convenire videatur; utpote qui pro amico, acrior, pro adversario contrà, lenior quàm par sit appareat. Equidem, Clarissimum Torricellium adversarium habere absit ut unquam optaverim; adversarius sanè illi ego ero nunquam, nisi ipse prior talem me effecerit. Quòd autem amicum & cupierim & adhuc cupiam, argumentum certissimum est, quòd prior amaverim, ac nomen ejus celebre per Galliam, quàm maximè potui, reddiderim. Siccine ergo (urgebit censor) cum amicis tuis te gerere solitus es? Primùm quidem, apologiam contra acerbam ipsius accusationem mihi debui; deinde metui (fateor) ne ipse quem summopere amicum mihi cupio,

pio,

pio, ex illis esset qui aliena veluti perspicillis cavis respiciunt; sua, convexis aut iis forsan quæ plurimis faciebus distinguuntur, unde fit ut iidem aliena contractiora, sua verò ampliora aut numerosiora, aut etiam pulchris coloribus ornatiora quàm sint revera videre videantur. Itaque admonere eum volui officiosè, ut amorem proprium alieno temperaret. Ac, ne ad excitandum duriusculus haberetur, stylum adhibui utcunque acutum & mordacem: sic enim fore speravi ut sapiens cùm sit, se ab amante pungi sentiret, atque ita ad redamandum acriùs incitaretur. Quanquam autem tot paginas minimè inutiles fore spero, doleo tamen quòd illas in tractando ejusmodi ingrato ac planè tædioso argumento insumere oportuerit; cùm alia ferè innumera longè suaviora, ac viris doctis, ut puto, acceptiora, cùm ex nobis, tùm ex nostris habeamus; qualia sunt quæ sequuntur. Circa analysim quidem, de æquationum recognitione, & emendatione, novâ prorsus methodo, de earumdem determinatione ac de ipsarum per locos proprios resolutione, atque compositione. Circa Geometriam, de locis planis, solidis, atque ad superficiem; ubi in specie, restituta habemus loca solida ad tres & quatuor lineas: de cylindris, & conis isoperimetris, cùm demptâ base, tum additâ: de iisdem sphæræ inscriptis, & circumscriptis, seu spatiorum solidorum, seu etiam superficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forsan quâ ratione a nobis concludi potuerit, positâ sphæræ diametro 32 partium, axem coni inscripti cujus superficies comprehensa base sit maxima, esse hanc apotomen $23 - \sqrt{17}$; si sphæræ superficies uno, duobusve, vel tribus aut pluribus circulis, in quotcunque & quascunque portiones secta sit, quamcunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuscujusque centrum gravitatis assignamus. Circa cylindricas & conicas superficies scalenas, tum etiam circa rectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam sit hoc problema: Portionem superficiei cylindri recti exhibemus, quæ superficiei datæ cylindri scaleni sit æqualis. Sed & istud: Dato quadrato, æqualem damus

 cy-

cylindricæ ſuperficiei portionem, idque abſolutè, nullâ ſuppoſitâ circuli quadraturâ, & excluſis cylindri baſibus. Problemata atque theoremata innumera habemus ſoluta, cùm circa conicas ſectiones, tùm circa alia fere omnia Geometriæ huc uſque notæ tam theoreticæ quàm practicæ capita. Circa Arithmeticam, Muſicam, Opticam, Aſtronomiam, Gnomonicam, & Geographiam.

Plura quidem feci, quàm quæ comprehendere dictis
In promptu mihi ſit;

ſed illa omnia vulgaria æſtimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori ſpatio quàm 24 horarum noſtrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejuſdem horizontis reſpectu. Facile quidem theorema, ſed quod primâ fronte impoſſibile multis videatur. At Mechanicam a fundamentis ad faſtigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis lapidibus quibus illa conſtabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc eſt totidem libris, abſolvatur. Primus eſt de centro virtutis potentiarum in univerſum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; ſecundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in ſpecie; quartus de fune mira continet; quintus de inſtrumentis & machinis; ſextus de potentiis quæ in diverſis mediis agunt; ſeptimus de motibus compoſitis; octavus denique, de centro percuſſionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova poſtulata, ſed tantùm ea quæ vulgò recepta ſunt apud Authores: quòd ſanè exequi, quàm non facile opus ſit, teſtes ſunt quotquot huc uſque de gravibus ſuper planis inclinatis exiſtentibus egerunt; inter quos & ipſe haberis, Vir Clariſſime, qui propoſitione prima libri primi de motu gravium deſcendentium, ad id demonſtrandum novo poſtulato uſus es, quod quivis non facilè conceſſerit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri ſolet, ſed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo uſitato diſpoſitâ, cujus beneficio propoſitio-

positionem illam non aliter demonstramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus, atque anno 1636 tanquam Mechanicæ nostræ prodromum, prælo commisimus atque vulgavimus, sed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantùm casum consideravimus qui solus ab omnibus attenditur; cùm scilicet potentia pondus in plano inclinato positum retinens, agit per lineam directionis ipsi plano parallelam; sed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque positionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonstravimus quod multis omnino paradoxum visum est; nempe, si intelligatur prælum aliquod duobus planis parallelis perfectè rigidis constans, quod ita disponatur ut ejus plana horizonti non sint parallela: tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis semper perfectè planis ac parallelis inter se remanentibus, illa nullum pondus inter se retinebunt; sed illud pondus propriâ gravitate statim labetur inter ipsa plana, atque idem a prælo sese liberabit, nisi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum nostrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiæ totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, (nodus est quodvis punctum in fune) æquilibrium constituant: tunc describi poterit triangulum cujus centrum gravitatis sit nodus ipse, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem describerentur triangula, sed omnia similia) erunt autem tunc tres potentiæ in eadem ratione cum tribus rectis a centro trianguli ad tres angulos terminatis; ita ut quælibet potentia homologa sit ei rectæ quæ in fune ipsius existit. Si quatuor potentiæ non existentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium constituant: tunc quod suprà de triangulo dictum est, de quadam pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, si perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex se existat, imposito quocunque vel mi-

nimo pondere, aut si ipse ex se gravis esse intelligatur, flectetur necessariò vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quotcunque funes ad communem nodum religati, totidem potentiis in eodem plano existentibus, quod planum horizonti non sit perpendiculare, quibuscunque viribus tendantur; imposito quocunque vel minimo pondere, vel si ipsi funes per se graves esse intelligantur, nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano consistant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis: Omnis sectoris circuli semicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, existente axe motus ad planum ejusdem circuli sive sectoris, perpendiculari, centrum percussionis sive impetus in recta angulum sectoris bifariam dividente quæsitum, sic reperietur: Ut chorda arcus sectoris ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum, & centrum percussionis sectoris interceptam. Ex tali centro quod extra sectorem aliquando existet, si impetus sectoris eo modo moti quo dictum est, excipiatur, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, si centrum illud extra sectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta existente excipi possunt.

De his & aliis agemus in posterum, si ita tibi placuerit, Vir Clarissime, postquam litibus valere jussis, solidam inierimus amicitiam, quam, ut spero, non recusabis. Illius autem leges, quòd ad litterarum commercium attinet, tales sunto. Nihil tentandi gratiâ scribam. Quicquid scripsero, nisi de eo dubitare me, aut illud quærere scripsero, verum existimasse censear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonstrationem mittere, mittam: nisi misero, si cupias, quàm citò mittere tenear. His legibus, si quid addere, aut detrahere; immo, si ipsas prorsus tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæstionibus agere tentandi gratiâ, odiosum esse atque amico indignum; neque

neque enim omnia possumus omnes: tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc si observaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia; & dum uterque nostrûm vicissim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum scientiam, salvâ tamen inventoris laude, possidebit.

F I N I S.





